المادة : الرياضيات الأستاذ : أسويدي محمد	الدرس 4:تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته	المستوى : الأولى باك مسلك العلوم التجريبية

القدرات المنتظرة	✍ التعبير عن توازي وتعامد مستقيمين ✍ حساب مساحات وقياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي ✍ التعرف على مجموعة النقط من المستوى التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ✍ تحديد مركز وشعاع دائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية ✍ المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارا متري والعكس . ✍ استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية وجبرية
التوجيهات التربوية	☑ تعتبر الدراسة التحليلية لدائرة مجالا خصبا لتوظيف تحليلية الجداء السلمي وخاصة منها المتعلقة بالمسافة والتعامد ، لذا ينبغي الحرص على إبراز دور الطريقة التحليلية في حل بعض المسائل ☑ ينبغي استعمال الجداء السلمي في تحديد معادلة ديكارتية لدائرة ☑ يتم التطرق من خلال أنشطة إلى دائرة محددة بثلاث نقط غير مستقيمية ☑ يتم بهذه المناسبة ، استغلال التجويه التحليلي للمستوى لتقديم نماذج للحل المبياني لبعض المتراجحات غير الخطية بمجهولين
أهداف الدرس	✍ تعرف الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم ✍ توظيف تحليلية الجداء السلمي في التعامد ✍ تعرف الصيغة التحليلية لمنظم متجهة وتوظيفه في حساب المسافات ✍ تعرف صيغتي $Cos\theta$ و $Sin\theta$ ✍ تحديد المعادلة الديكارتية لمستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه ✍ تعرف مستقيمين متعامدين انطلاقا من معادلتيهما ✍ التمكن من حساب مسافة نقطة عن مستقيم . ✍ تعرف معادلة ديكارتية لدائرة محددة بمركزها وشعاعها . ✍ تعرف معادلة ديكارتية لدائرة محددة بأحد أقطارها . ✍ تعرف تمثيل بارا متري لدائرة ✍ التمكن من تحديد مجموعة النقط $\{M(x;y)/x^2+y^2+ax+bx+c=0\}$ ✍ تعرف داخل وخارج دائرة ✍ التمكن من دراسة الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة ✍ تحديد معادلة المماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة
المكتسبات القبلية	✍ المعلم والإحداثيات ✍ الجداء السلمي لمتجهتين من المستوى المتجهي V_2 ✍ المستقيم في المستوى دراسة تحليلية
الامتدادات	✍ تحليلية الجداء السلمي في الفضاء ✍ جميع دروس الهندسة التحليلية ✍ ....
فقرات الدرس	I) الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم II) المستقيم في المستوى دراسة تحليلية III) دراسة تحليلية للدائرة في المستوى IV) دراسة مجموعة النقط $\{M(x;y)/x^2+y^2+ax+bx+c=0\}$ V) الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة

I) الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

1) المعلم المتعامد المباشر

تعريف 1

✓ إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين فإن الزوج $(\vec{v};\vec{u})$ يسمى أساسا للمستوى المتجهي V_2

✓ O نقطة من المستوى و $(\vec{v};\vec{u})$ أساس للمستوى المتجهي V_2 . المثلوث $(O;\vec{u};\vec{v})$ يسمى معلما للمستوى

تعريف 2

ليكن $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا للمستوى و O نقطة من المستوى .

✓ نقول إن $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان : $\vec{i}.\vec{j}=0$ $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=1$

✓ نقول إن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i},\vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما .

✓ إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم و $(\overline{\vec{i},\vec{j}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ نقول إن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

في جميع فقرات هذا الدرس نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) الصيغة التحليلية للجداء السلمي لمتجهتين

✓ **نشاط 1**

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_2 بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

انشر ثم بسط مايلي : $(x\vec{i}+y\vec{j}).(x'\vec{i}+y'\vec{j})$ ثم استنتج $\vec{u}.\vec{v}$

خاصية 1

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_2 بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

أمثلة

نعتبر المتجهات : $\vec{u}(2;-3)$ و $\vec{v}(-1;4)$ و $\vec{w}\left(\sqrt{2};\frac{2}{3}\right)$.

لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=2\times(-1)+(-3)\times4=-2-12=-14$.

ولدينا : $\vec{u}.\vec{w}=2\times\sqrt{2}+(-3)\times\frac{2}{3}=2\sqrt{2}-2$

ولدينا : $\vec{w}.\vec{v}=\sqrt{2}\times(-1)+\frac{2}{3}\times4=-\sqrt{2}+\frac{8}{3}$

خاصية 2

تكون المتجهتان $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان : $xx'+yy'=0$

أمثلة

حدد قيمة العدد الحقيقي α لكي تكون $\vec{u}(3;-1+\alpha)$ و $\vec{v}(2-\alpha;5)$ متعامدتين .

لدينا :

$$\begin{aligned}\vec{u}\perp\vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0\\ &\Leftrightarrow 3\times(2-\alpha)+(-1+\alpha)\times5=0\\ &\Leftrightarrow 6-3\alpha-5+5\alpha=0\\ &\Leftrightarrow 2\alpha+1=0\\ &\Leftrightarrow \alpha=\frac{-1}{2}\end{aligned}$$

إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان $\alpha=-\frac{1}{2}$.

ملاحظة

$\vec{u}(x;y)$ متجهة معلومة : إذن $\vec{u}.\vec{i}=x$ و $\vec{u}.\vec{j}=y$

3) الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

خاصية 1

منظم المتجهة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ **هو :** $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

أمثلة

نعتبر المتجهات : $\vec{u}(3;-4)$ و $\vec{v}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\vec{w}(1;3)$.

لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

و $\|\vec{w}\|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

خاصية 2

المسافة بين النقطتين $A(x_A;y_A)$ **و** $B(x_B;y_B)$ **هي :** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

مثال

لنحسب المسافة AB حيث $A(-1;1)$ و $B(4;3)$

لدينا :
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(4+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

تمرين 01

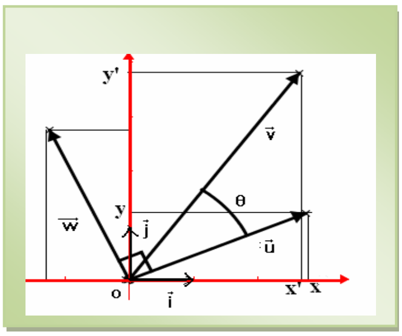
نعتبر النقط $A(-3;-1)$ و $B(1;1)$ و $C(-5;3)$.بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A.

4) صيغتا $Sin\theta$ و $Cos\theta$

نشاط 2

نعتبر متجهتين $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ غير منعدمتين وليكن θ قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

1) بين أن $Cos\theta=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$.



2) لتكن $\vec{w}$ متجهة من المستوى بحيث $\frac{\pi}{2}$ هو قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{w}})$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ أنظر الشكل

أ / حدد زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{w}$

ب / بين أن $\frac{\pi}{2}-\theta$ هو قياس الزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{w}})$

ج/ بين أن : $Sin\theta=\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|}$ واستنتج أن $Sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

د / احسب $Cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و $Sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ في كل من الحالتين التاليتين :

أ - $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{v}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ و ب - $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$

خاصية

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى المتجهي V_2 و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

لدينا :

$$Cos\theta=\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$Sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

تمرين 02

نعتبر النقط $A(5;0)$ و $B(2;1)$ و $C(6;3)$.

1 / احسب : $Cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و $Sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2 / استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

تمرين 03

نعتبر النقط $A(1;1)$ و $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$ و $C(6;-4)$.

1 / احسب AB و AC و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2 / احسب : $Cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و $Sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ثم استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

تمرين 04

احسب $Cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و $Sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ في كل من الحالتين التاليتين :

- أ - $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$
- ب - $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{v}=(\sqrt{3}-1)\vec{i}+(\sqrt{3}+1)\vec{j}$.

نـــتـــائـــج

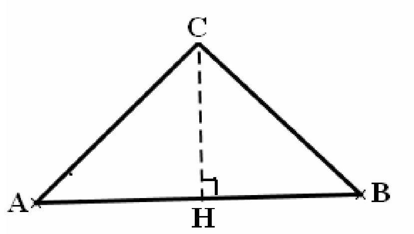
نشاط 3

① ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي لـ C على (AB)

1 / حدد $Sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ واستنتج $Sin\widehat{A}$ (حيث $\widehat{A}$ زاوية هندسية)

2 / حدد S مساحة المثلث ABC بدلالة AB و AC و $Sin\widehat{A}$.

3/ استنتج أن $S=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|$



① باستعمال نتيجة ② استنتج مساحة متوازي الأضلاع ABDC المحدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

نتيجة 1

ليكن ABC مثلثا . ولتكن S مساحته لدينا :

$$S=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\right|=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\right|$$

نتيجة 2

مساحة متوازي الأضلاع ABDC المحدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي: $S_{ABDC}=\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|$

II) المستقيم في المستوى دراسة تحليلية

1) المتجهة المنظمية على مستقيم

تعريف

ليكن المستقيم (D) و $\vec{u}$ متجهة موجهة له .
نقول إن متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ منظمية على المستقيم (D) إذا كانت تحقق $\vec{n}\vec{u}=0$

أمثلة :

✓ نعتبر المستقيم : $(D): 2x+3y-4=0$. لدينا $\vec{u}(-3;2)$ متجهة موجهة لـ (D) و $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية عليه .
لأن : $\vec{n}\vec{u}=(2\times(-3))+(3\times 2)=0$

✓ نعتبر المستقيم : $(\Delta): y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$. لدينا $\vec{u}\left(1;\frac{1}{2}\right)$ متجهة موجهة لـ (Δ) و $\vec{n}(1;-2)$ متجهة منظمية عليه .
لأن : $\vec{n}\vec{u}=(1\times 1)+\left(\frac{1}{2}\times(-2)\right)=0$.

خاصية

ليكن (D) مستقيما معادلته ax+by+c=0 . المتجهة $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية على المستقيم

ملاحظات

✓ إذا كانت $\vec{n}$ متجهة منظمية على مستقيم (D) فإنه لكل k من $\mathbb{R}^*$. $k.\vec{n}$ أيضا متجهة منظمية عليه .
✓ إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على نفس المستقيم فإنهما تكونان مستقيميتين .
✓ إذا كانت $\vec{u}(a;b)$ متجهة موجهة لمستقيم (D) فإن المتجهة $\vec{n}(-b;a)$ منظمية عليه .

2) المعادلة الديكارتية لمستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه

تمهيد

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A;y_A)$ و $M(x;y)$ نقطتين من المستوى؛ تكون المتجهة $\overrightarrow{AM}$ متعامدة مع $\vec{n}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$. أي إذا كانت مستقيمية مع المتجهة $\vec{u}(-b;a)$ أي إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم المار من النقطة A والموجه بالمتجهة $\vec{u}$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ هي المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

نرمز لهذا المستقيم بالرمز (D). لدينا إذن :

$$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$
$$\Leftrightarrow ax+by+c=0 \quad (c=-(ax_A+by_A))$$

خاصية

معادلة المستقيم (D) المار من $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية عليه هي:
$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

مثال لنحدد معادلة المستقيم المار من $A(-1;2)$ و $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية عليه
لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى لدينا :

$$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)+3(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y-4=0$$

إذن معادلة ديكارتية للمستقيم (D) هي : $(D):2x+3y-4=0$

ملاحظات :

- ✓ كل مستقيم يحدد بنقطة ومتجهة موجهة له أو بنقطة ومتجهة منظمية عليه .
- ✓ إذا كانت $\vec{n}(\alpha;\beta)$ متجهة منظمية على مستقيم (D) فإن : $(D):\alpha x+\beta y+\gamma=0$

تمرين 05

① اكتب في الحالات التالية معادلة المستقيم (D) المار من النقطة A بحيث تكون المتجهة $\vec{n}$ منظمية عليه (D

- $A(2;3)$ و $\vec{n}(2;-1)$ • $A(-1;5)$ و $\vec{n}(3;4)$ • $A(-2;4)$ و $\vec{n}(\sqrt{2};-1)$

② ليكن ABC مثلثا بحيث : $A(3;1)$ و $B(-1;5)$ و $C(2;-2)$

حدد معادلة ديكارتية لارتفاع المثلث ABC المار من النقطة C

تمرين 06

نعتبر النقط $A(2;5)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$.

أوجد معادلات ديكارتية لوا سطات المثلث ABC . ثم تحقق من أن هذه الواسطات تتقاطع في نقطة Ω متساوية المسافة عن رؤوس المثلث ABC.

3) مسافة نقطة عن مستقيم

تعريف

> **لتكن A نقطة من المستوى و H مسقطها العمودي على مستقيم (D) .**
> **المسافة AH تسمى المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)؛ و نرمز لها بالرمز : $d(A;(D))$.**

نشاط 4

في المستوى نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $(D):ax+by+c=0$ ؛ بحيث : $(a;b)\neq(0;0)$ ولتكن النقطة $A(x_A;y_A)$ من المستوى مسقطها العمودي على (D) هي النقطة H

1 / تحقق من أن : $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\|\vec{n}\|.\|\overrightarrow{AH}\|$ ؛ حيث : $\vec{n}(a;b)$.

2 / برهن أن : $AH=\dfrac{|ax_A+By_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

خاصية

> لتكن $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى و (D) مستقيما معادلته $(D):ax+by+c=0$
> لدينا : $d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+By_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

أمثلة :

$(D):3x-4y+1=0$; $A(6;3)$ و $B(0;-2)$

لدينا : $$d(A;(D))=\frac{|3\times x_A+(-4)\times y_A+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\times6+(-4)\times3+1|}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}$$

و $$d(B;(D))=\frac{|3\times x_B+(-4)\times y_B+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\times0+(-4)\times(-2)+1|}{\sqrt{25}}=\frac{9}{5}$$

تمرين 07

نعتبر النقطتين $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$

1 / تحقق من أن : $5x-4y-7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

2 / أحسب مسافة النقطة O أصل المعلم عن المستقيم (AB)
3 / استنتج مساحة المثلث OAB .

تمرين 08

نعتبر النقطة $A(-1;4)$ و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+2y-3=0$

1 / أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D)
2 / حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

III) دراسة تحليلية للدائرة في المستوى

1) معادلة ديكارتية لدائرة محددة بمركزها وشعاعها .

نشاط 5

في المستوى P نعتبر الدائرة (ζ) التي مركزها $\Omega(-1;3)$ وشعاعها 3 .

1 / أ / لتكن M نقطة من المستوى (P) بين أن : (1) $M\in(\zeta)\Leftrightarrow \Omega M^2=9$

ب / اكتب بدلالة x و y المتساوية (1)

3 / هل النقط $A(2;-1)$ و $B\left(3;\frac{11}{2}\right)$ و $C(-3;1)$

4 / باتباع نفس خطوات السؤال 1 / حدد معادلة ديكارتية للدائرة $\zeta(\Omega;r)$ بحيث $\Omega(a;b)$.

خاصية

معادلة الدائرة (ζ) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r مع $r>0$ هي: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
وتكتب أيضا : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ **حيث :** $c=a^2+b^2-r^2$

أمثلة

✓ معادلة ديكارتية للدائرة $\zeta(O(0;0)\ ;\ 1)$ هي : $x^2+y^2=1$
✓ معادلة ديكارتية للدائرة $\zeta\left(A(-2;3)\ ;\ \sqrt{5}\right)$ هي : $(x+2)^2+(y-3)^2=5$ أي : $x^2+y^2+4x-6y+8=0$.

تمرين 09

1 / اكتب معادلة ديكارتية للدائرة (ζ) التي مركزها Ω وشعاعها r في الحالات التالية :

• $\Omega(-1;-3)$ و $r=\sqrt{2}$ • $\Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ و $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\Omega(-1;0)$ و $r=2\sqrt{5}$

2 / اكتب معادلة ديكارتية للدائرة (ζ) التي مركزها Ω والمارة من النقطة A في الحالات التالية :

• $\Omega(2;0)$ و $A(2;4)$ • $\Omega(1;2)$ و $A(4;-2)$ • $\Omega(-2;3)$ و $A(2;-1)$

2) معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها .

نشاط 6

لتكن (ζ) دائرة مركزها Ω وشعاعها r و [AB] أحد أقطارها . ولتكن M نقطة من المستوى .

1 / بين أن : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\Omega M^2-r^2$.
2 / استنتج أن (ζ) هي مجموعة النقط M من المستوى بحيث : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.
3 / نعتبر $A(2;3)$ و $B(-4;5)$ ولتكن $M(x;y)$ نقطة من (ζ) ، اكتب علاقة تربط x و y

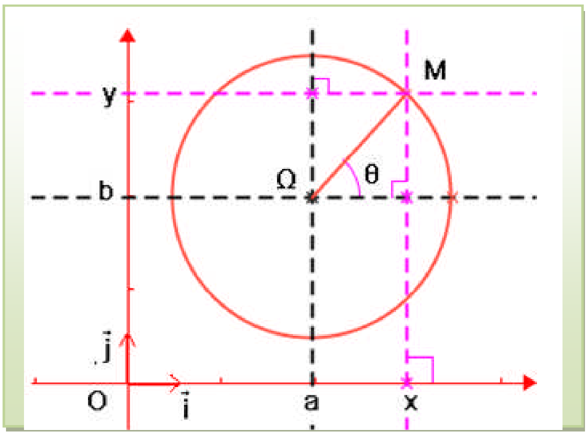
خاصية

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين مختلفتين من المستوى .
مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ ومعادلتها هي :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

3) التمثيل البارمتري لدائرة

نشاط 7



لتكن (ζ) الدائرة التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

✓ بين أن : $\overrightarrow{\Omega M}=\Omega M\left(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right)$

حيث : θ قياس الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{\Omega M}}\right)$

✓ لتكن M(x,y) نقطة من الدائرة (ζ) بين أن :

$\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$ (استعن بالشكل)

✓ بين أن مجموعة النقط M(x;y) من المستوى P التي يحقق زوج إحداثيتها النظمة التالية :

$\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$ هي دائرة محددا مركزها وشعاعها .

خاصية

الدائرة (ζ) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r هي مجموعة النقط M(x;y) من المستوى (P) التي تحقق :

$(\theta\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$ (S) النظمة (S) تسمى تمثيلا بارا متريا للدائرة (ζ)

تمرين 10

① اكتب المعادلة الديكارتية للدائرة (ζ) في كل حالة من الحالات التالية :

1/ الدائرة (ζ) مركزها $\Omega(-2;1)$ وتمر من النقطة $A(1;4)$.

2/ $(\theta\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=1+5\cos\theta \\ y=-3+5\sin\theta \end{cases}$ تمثيل بارا متري للدائرة (ζ).

3/ $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (ζ) حيث $A(1;2)$ و $B(-3;5)$

② لتكن (ζ) دائرة معادلتها الديكارتية : $x^2+y^2-2x+4y+2=0$ حدد مركز وشعاع الدائرة (ζ) واستنتج تمثيلا بارا متريا لها .

IV) دراسة مجموعة النقط $(E)=\left\{M(x;y)\in(P)/x^2+y^2+ax+bx+c=0\right\}$

تمهيد

لتكن a و b و c أعداد حقيقية ، نعتبر المجموعة (E) التالية : $(E)=\left\{M(x;y)/x^2+y^2+ax+bx+c=0\right\}$

لتكن M(x;y) نقطة من المستوى :

$$M(x;y)\in(E)\Leftrightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+ax\right)+\left(y^2+by\right)+c=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{a^2}{4}+\left(y^2+by+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+c=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

نعتبر النقطة $\Omega\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2}\right)$ لدينا : $M(x;y)\in(E)\Leftrightarrow\Omega M^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$ $(*)$

هناك ثلاث حالات .

الحالة 1 . إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فإن المتساوية $(*)$ غير ممكنة وبالتالي (E) مجموعة فارغة

الحالة 2 . إذا كان $a^2+b^2-4c=0$ فإن المتساوية $(*)$ تصبح $\Omega M^2=0$ أي $\Omega=M$ ومنه $(E)=\{\Omega\}$

الحالة 3 : إذا كان $a^2+b^2-4c>0$ فإن المتساوية $(*)$ تصبح $\Omega M=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

يعني أن (E) هي الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

خاصية

a و b و c أعداد حقيقية و (E) مجموعة النقط M(x;y) من المستوى التي تحقق المعادلة : $x^2+y^2+ax+bx+c=0$

- **تكون (E) دائرة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2-4c>0$. ومركز هذه الدائرة هو $\Omega\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2}\right)$ وشعاعها $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$**
- **إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فإن (E) هي المجموعة الفارغة .**
- **إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فإن (E) هي : $(E)=\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2}\right)\right\}$.**

مثال

لتكن (ζ) مجموعة النقط M(x;y) التي تحقق : $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

$$M(x;y)\in(\zeta)\Leftrightarrow(x^2-2x)+(y^2+4y)=4$$
$$\Leftrightarrow(x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4=4$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$$

ومنه (ζ) هي الدائرة ذات المركز $\Omega(1,-2)$ و الشعاع 3

تمرين 11

حدد طبيعة المجموعة (ζ) المعرفة بمعادلتها الديكارتية في كل حالة من الحالات التالية :

- $x^2+y^2-x+3y-4=0$
- $x^2+y^2+3x-7y+15=0$
- $x^2+y^2+4x-2y+8=0$

V) داخـل وخارج دائـرة .

تعاريف

لتكن (ζ) دائرة مركزها Ω وشعاعها r $(r>0)$ و M نقطة من المستوى :

- تكون النقطة M نقطة من الدائرة إذا و فقط إذا كان : $\Omega M=r$
- تكون النقطة M داخل الدائرة (ζ) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M<r$
- تكون النقطة M خارج الدائرة (ζ) إذا و فقط إذا كان : $\Omega M>r$

نتيجة

لتكن (ζ) دائرة معادلتها هي : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ لكل نقطة $M(x_0;y_0)$ من المستوى لدينا :

- **M نقطة من الدائرة يكافئ : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0$**
- **M نقطة توجد داخل الدائرة يكافئ : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c<0$**
- **M نقطة توجد خارج الدائرة يكافئ : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c>0$**

تمرين 12

① لتكن (ζ) الدائرة التي مركزها $\Omega(-1;2)$ وشعاعها $r=3$

حدد وضع النقطتين A(3;-1) و $B(0;1)$ بالنسبة للدائرة (ζ)

② i / حل مبيانيا المتراجحات التالية :

- $x^2+y^2+2x-6y+9\geq0$
- $x^2+y^2+2y-3<0$

ii / حل مبيانيا النظمات التالية :

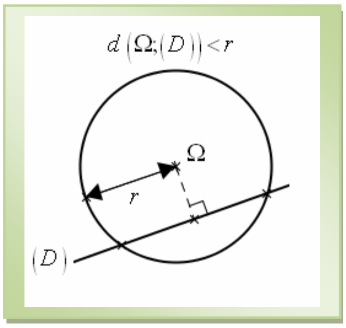
- $\begin{cases}x^2+y^2-4x<0\\x-y-1>0\end{cases}$
- $\begin{cases}x^2+y^2-2x+2y-7<0\\x-y>0\end{cases}$

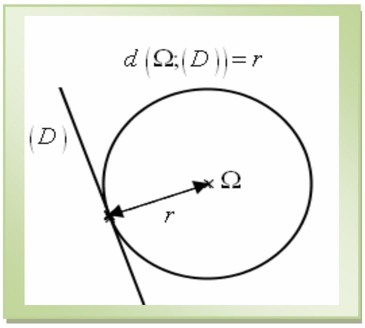
VI) الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة

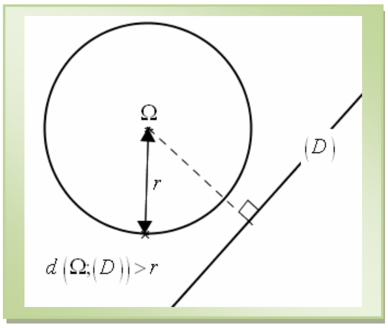
1) خاصية

ليكن المستقيم (D) و (ζ) دائرة مركزها Ω وشعاعها r .

- إذا كان $d\left(\Omega;(D)\right) < r$ فإن المستقيم (D) يقطع الدائرة (ζ) في نقطتين مختلفتين .
- إذا كان $d\left(\Omega;(D)\right) = r$ فإن المستقيم (D) يقطع الدائرة (ζ) في نقطة واحدة . (مماس للدائرة في هذه النقطة)
- إذا كان $d\left(\Omega;(D)\right) > r$ فإن المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (ζ)







مثال

لتكن (ζ) الدائرة التي معادلتها : $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ وليكن المستقيم (D) : $(D):x+y-3=0$

لدينا : (ζ) دائرة مركزها $\Omega(1;-4)$ وشعاعها $r=4$

بما أن : $d\left(\Omega;(D)\right)=\dfrac{|-1+1\times4-3|}{\sqrt{2}}=0$ فإن $d\left(\Omega;(D)\right)<r$ وبالتالي (D) يقطع الدائرة (ζ) في نقطتين مختلفتين

ولتحديد نقط التقاطع نحل النظمة

$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-11=0 \end{cases}$ بعد التعويض نجد $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

ومنه المستقيم (D) يقطع الدائرة (ζ) في النقطتين $A(1;2)$ و $B(5;-2)$

2) المعادلة الديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة

خاصية

لتكن (ζ) دائرة معادلتها : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ولتكن $A\left(x_A;y_A\right)$ نقطة من (ζ).

معادلة المستقيم المماس للدائرة (ζ) في A هي : $(x-x_A)\left(\dfrac{a}{2}+x_A\right)+(y-y_A)\left(\dfrac{b}{2}+y_A\right)=0$

ملاحظة

للبرهنة على هذه الخاصية نستعمل التكافؤ التالي : $M\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

لأن: إذا كان (D) مماسا للدائرة في نقطة A فإن $d\left(\Omega;(D)\right)=A\Omega=r$ و A هي المسقط العمودي ل Ω على (D)

مثال

لتكن (ζ) الدائرة التي معادلتها : $(x+1)^2+(y+2)^2=4$ و $A(1;-2)$ نقطة من الدائرة (ζ)

باستعمال الخاصية معادلة المماس للدائرة (ζ) عند النقطة $A(1;-2)$ هي :

$(x-1)(1+1)+(y+2)(2-2)=0$ أي $x=1$ إذن معادلة المماس هي : $x=1$

طريقة ثانية

ليكن (D) المماس للدائرة (ζ) عند النقطة $A(1;-2)$. لدينا مركز الدائرة : $\Omega(-1;-2)$ ومنه المتجهة $\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ منظمية على

المستقيم (D) إذن : $(D):-2x+0y+c=0$ وبما أن $A\in(D)$ فإن -2+c=0 ومنه $(D):x=1$