

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$.

(1) اكتب على الشكل الأسّي: z_A و z_B .

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

(أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

(ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$.

(أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

(ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات

اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(1; 1; 0)$ ،

$B(2; 1; 1)$ و $C(-1; 2; -1)$.

(1) (أ) بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامة.

(ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x + y - z - 2 = 0$.

(2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$$(Q): 2x + y - z - 1 = 0 \quad \text{و} \quad (P): x + 2y - 3z + 1 = 0$$

والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0; 4; 3)$ و $\vec{u}(-1; 5; 3)$ شعاع توجيه له.

(أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

(ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

(3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q).

التمرين الثالث: (10 نقاط)

(I) لنكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x) = \ln(x + a) + b$ حيث a, b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

(ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية \ln ثم ارسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) احسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $] \frac{3}{2}; +\infty[$ حلا وحيدا α .
تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

(ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $] \frac{1}{2}; 5[$ في المعلم السابق.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

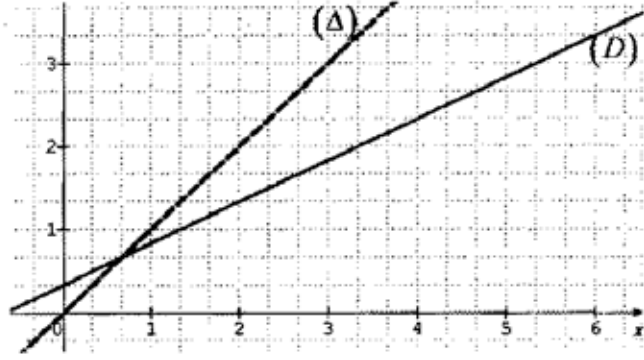
(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha; 1]$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; 1]$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

(1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

(2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

الموضوع الثاني



التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا
المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x \text{ و } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

(1) لنكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد

$$\text{الطبيعية } \mathbb{N} \text{ بـ : } u_0 = 6 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ - انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 ؛ دون حسابها
مبرزاً خطوط الرسم.

ب - عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

ج - أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > \frac{2}{3}$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D

$$\text{لاحقاتها على الترتيب: } z_A = 3 + 3i, z_B = \overline{z_A}, z_C = -z_A, z_D = -z_B$$

أ - بين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية الدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B .

ج - بين أن النقط A, O, C و B في استقامة وكذلك النقط O, D و B .

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (\mathcal{P}) الذي معادلته:

$$x - 2y + z + 3 = 0$$

$$(1) \text{ نذكر أن حامل محور الفواصل } (O; \vec{i}) \text{ يعرف بالجملة } \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

- عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O; \vec{i})$ مع المستوي (\mathcal{P}) .

$$(2) \text{ } B \text{ و } C \text{ النقطتان من الفضاء حيث: } B(0; 0; -3) \text{ و } C(-1; -4; 2)$$

أ - تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (\mathcal{P}) .

ب - احسب الطول AB .

ج - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (\mathcal{P}) .

$$(3) \text{ أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم } (\Delta) \text{ المارّ بالنقطة } C \text{ والعمودي على المستوي } (\mathcal{P}).$$

ب - تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ج - احسب مساحة المثلث ABC .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(1) \text{ أ - احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{ب - احسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ وفسّر هندسيا النتيجة.}$$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ - بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x \text{ و } y = x + 1$$

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

$$(4) \text{ أثبت أن النقطة } \omega \left(0; \frac{1}{2} \right) \text{ هي مركز تناظر للمنحنى } (C_f).$$

$$(5) \text{ أ - بيّن أن المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلين } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث: } \ln 2 < \alpha < 1 \text{ و } -1,4 < \beta < -1,3$$

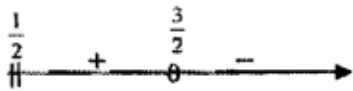
ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج - ارسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$.

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

العلامة		عناصر الاجابة (الموضوع الأول)	محاو ر الموضوع
المجموع	مجزأة		
05		التمرين الأول: (5 نقاط)	
	0,5×2	1. كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي: $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	
	0,25×3	2. المركز B ، النسبة 2، الزاوية $\frac{\pi}{2}$	
	0,5	ب) $z_C = 4 + 5i$	
	0,5	ج) مثلث قائم في B	
	0,5	3. $z_D = 5 + 3i$	
	0,5	ب) $ABCD$ مستطيل لأن: $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}}$ ، $\hat{B} = 90^\circ$	
	0,25	4. $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = 6$	
0,5	ب) $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overline{MD}, \overline{MB}) = 0 + 2k\pi$		
0,5	$(\Delta) = (BD) - [BD]$		
05		التمرين الثاني: (5 نقاط)	
	1	1. النقطة A ، B و C ليست في استقامة لأن \overline{AB} ، \overline{AC} غير مرتبطين خطياً.	
	1	ب) $(ABC): x + y - z - 2 = 0$	
	1	2. تمثيل وسيطي للمستقيم $(D): \begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	
	1	ب) التحقق أن $(D) \subset (P)$ و $(D) \subset (Q)$ أو حل الجملة. (الانتقال من جملة معادلتين إلى التمثيل الوسيطي)	
	1	3. $(P) \cap (Q) \cap (ABC) = \{E(-1; 9; 6)\}$	

العلامة		عناصر الاجابة (تابع الموضوع الأول)	معايير الموضوع
المجموع	جزأة		
10		التمرين الثالث: (10 نقاط)	
	0,5	I. 1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
	0,75	2. $f'(x) = \frac{2}{2x-1} > 0$ ومنه f متزايدة تماما على I	
	0,25	جدول التغيرات	
	0,5	3. $f'(x) = 1$ تكافئ $x = \frac{3}{2}$	
		سلم خاص بالمكفوفين: معادلة المماس 0,75	
	0,5	4. ا. $f(x) = \ln(x - \frac{1}{2}) + 1 + \ln 2$	
		ب. (C_f) ينتج من (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(\frac{1}{2}; 1 + \ln 2)$	
	0,5	أو في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) حيث $\omega(\frac{1}{2}; 1 + \ln 2)$ (C_f) هو منحنى الدالة \ln رسم (C) و (C_f) .	
		سلم خاص بالمكفوفين: نعطى 0,5 لشرح كيفية رسم (C_f) فقط (لا يطلب الرسم)	
	0,5+0,25	II. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$	
	2x0,5	2. اتجاه تغير g : $g'(x) = \frac{3-2x}{2x-1}$ وإشارته: 	
	0,25	g متزايدة تماما على $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ ومتناقصة تماما على $[\frac{3}{2}; +\infty[$	
	0,5	- جدول التغيرات	
		سلم خاص بالمكفوفين: القيمة الحدية $g(\frac{3}{2}) = \ln 2 - \frac{1}{2}$ 0,5	
	0,25	3. ا. $g(1) = 0$	
	1	$g(\alpha) = 0$ و $2 < \alpha < 3$	
	0,5	ب. رسم (C_g) .	
	0,5	4. إشارة $g(x)$	
	0,5	- وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .	
	0,5	5. من أجل كل x من $]1; \alpha[$ ، $]1; \alpha[$ $f(x) \in]1; \alpha[$	
	0,25	III. 1. $u_n = 1 + \ln(1 + \frac{1}{n})$	
	0,5	$n = 8$	
	0,5	2. $S_n = n + \ln(n+1)$	

محاو	عناصر الاجابة	العلامة
الموضوع	الموضوع الثاني	مجزأة
المتاليات العديّة	التمرين الأول: (05 نقاط)	
	1. أ - تمثيل على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4	1
	ب - (Δ) و (D) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$	0,25
	ج - التخمين: يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.	0,25
	سلم خاص بالمكفوفين:	
	1. أ - حساب u_1, u_2, u_3, u_4 1	
	ب - إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) : $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ 0,5	
	2. أ - استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات $u_n > \frac{2}{3}$	0,75
	ب - $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n - \frac{2}{3})$ ؛ $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي (u_n) متناقصة تماما	0,5
	3. أ - $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{16}{3}$	0,75
	ب - كتابة بدلالة n عبارة الحد العام v_n : $v_n = \frac{16}{3} \times (\frac{1}{2})^n$	0,5
	$u_n = \frac{16}{3} \times (\frac{1}{2})^n + \frac{2}{3}$	0,25
ج - $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{32}{3} [1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]$	0,5	
$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = n + 1 + \frac{32}{3} [1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]$	0,25	
الأعداد المركبة	التمرين الثاني: (04 نقاط)	
	1. حل في \square المعادلة: $\Delta' = -9 = (3i)^2$ و $z' = 3 + 3i$ و $z'' = 3 - 3i$	0,75
	- الشكل الأسّي للحلين: $z' = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z'' = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	0,5
	2. أ - $ z_A = z_B = z_C = z_D = 3\sqrt{2}$ أي $OA = OB = OC = OD = 3\sqrt{2}$	1
	ب - تعيين زاوية للدوران R : $\frac{z_B}{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $(\overline{OA}; \overline{OB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $(k \in \square)$	0,5
	ج - $\frac{z_D}{z_B} = -1$ ، $\frac{z_C}{z_A} = -1$ هما عددان حقيقيان إذن A, O, C والنقط D, O, B في استقامة. أو $z_B + z_D = 0$ ، $z_A + z_C = 0$ ومنه O منتصف كل من $[BD]$ ، $[AC]$	0,5
	د - $ABCD$ مربع (القطران متناصفان، متعامدان ومتقايسان)	0,75

العلامة		عناصر الاجابة	مجاور
المجموع	مجزأة	تابع للموضوع الثاني	الموضوع
04		التمرين الثالث: (04 نقاط)	الهندسة الفضائية
	0,5	1. $A(-3;0;0)$	
	0,25	2. أ - لدينا $0 - 2 \times 0 + (-3) + 3 = 0$ معناه $B \in (\mathcal{P})$	
	0,5	ب - حساب الطول AB : لدينا $AB(3;0;-3)$ ومنه $AB = \sqrt{9+0+9} = 3\sqrt{2}$	
	0,75	ج - $\partial(C;(\mathcal{P})) = \frac{ -1+8+2+3 }{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$	
	0,75	3. أ - $\vec{u}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيهي لـ (Δ) وبالتالي $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -4-2t \\ z = 2+t \end{cases}$	
	0,5	ب - تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) : $t = -2$ إذن $A \in (\Delta)$	
	0,75	ج - حساب مساحة المثلث ABC : $\frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{3} \text{ ua}$	
07		التمرين الرابع: (07 نقاط)	
	0,5	1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
	0,5	ب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$	
	0,25	$x = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)	
	0,25+0,5	2. المشتقة + الإشارة	
	2×0,25	- جدول التغيرات + اتجاه التغير	
	0,5	سليم خاص بالمكفوفين: اتجاه التغير	
	2×0,25	3. مستقيمان مقاربا $(\Delta): y = x$ $(\Delta'): y = x + 1$	
	2×0,5	تحديد الوضعية	
	0,25	4. $\omega(0; 0,5)$ مركز تناظر	
	2×0,5	5. أ) إثبات وجود وحصر كل من α ، β (تطبيق نظرية القيم المتوسطة)	
	0,5	ب $f'(x) = 1$ معادلة ليس لها حل في \mathbb{R}^* ومنه لا توجد مماسات .	
	0,75	ج) رسم (Δ) ، (Δ') ، (C_f)	
	0,25	د $(m-1)e^{-x} = m$ تكافئ $f(x) = x + m$	
	0,25	المناقشة حسب قيم m .	
		سليم خاص بالمكفوفين:	
	0,5	6. أ) التحقق من المساواة.	
	0,75	ب) المناقشة حسب قيم m	