

BAC

بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا بكالوريا

# ملخص بسيط في مادة الرياضيات

[www.bac-alg.com](http://www.bac-alg.com)

$$\begin{aligned} y &= e^{(w/2)} + 16 > 15 \\ V(w) &= 4b \\ y &= ch \\ t^2 &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y^2} \end{aligned}$$

البكالوريا  
فقط

اهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى روح أبي الطاهرة  
والى أرواح موتى المسلمين الطاهرين وكما اهديه  
لطلبة النهـائي والمتمثل في طرق بسيطة في  
فهم مادة الرياضيات التي تعد من ضمن المواد  
التي ينفر منها بعض الطلبة ولعل هذه الطرق

تساعدك على تذوق مادة الرياضيات وتعلمي

لكم التوفيق والنجاح في

شهادة البكالوريا

هذا الملخص موجه للتلميذ وليس للأستاذ

لكم مني خالص التقدير والاحترام

## الفهرس :

الدوال.....01

الهندسة الفضائية.....07

الأعداد المركبة.....11

[www.bac-alg.com](http://www.bac-alg.com)

المتتاليات العددية.....14

الاحتمالات.....18

ناجحون بإذن الله



# الدوال

## 1. الدوال الأسية

1. عفايس نناع النھ ايات:

دير في بالك هذو الصوال نناع النھ ايات صھيت

$$\begin{array}{l|l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 & \end{array}$$

مثال:

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 1) = +\infty - \infty \text{ ع.ع.ك} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty \end{array}$$

لان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

ملاحظت بيناتنا:

كي نجيل حالت عدم التعين اخرج  $e^x$  عاملا مشترك او اخرج  $x$  عاملا مشتركا في بعض الكالات

2. عفايس نناع النھ ايات:

$$\begin{array}{l} 1) e^0 = 1 \\ 2) e^{\ln x} = x \\ 3) e^x = 2 \text{ يك افغ } x = \ln 2 \\ 4) e^x = -2 \text{ مستحيل} \end{array}$$

3. الاشتقاق:

$$\begin{array}{l} f(x) = e^{5x+1} \\ f'(x) = 5e^{5x+1} \\ g(x) = 2xe^{3x+1} \\ g'(x) = 2e^{3x+1} + 6xe^{3x+1} \\ g'(x) = (2 + 6x)e^{3x+1} \end{array}$$

## 2. الدوال اللوغاريتمية

1. عفايس نناع النھ ايات:

دير في بالك هذو الصوال نناع النھ ايات صھيت

$$\begin{array}{l|l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 & \end{array}$$

مثال:

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2x - 1) = \text{ع.ع.ك} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - 2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty (-2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{4}{x+2} + \ln(x+2) \right) = \text{ع.ع.ك} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} (4 + (x+2) \ln(x+2)) = +\infty (4) \end{array}$$

= +\infty

www.bac-alg.com

كي نجيل حالت عدم التعين عند  $\infty$  اخرج ما داخل ال  $\ln$  عاملا مشتركا اما اذا كانت حالت عدم التعين عند عدد اخرج مقلوب ما داخل ال  $\ln$  عاملا مشتركا وتبقى ملاحظت نسب

2. عفايس نناع النھ ايات:

$$\begin{array}{l} 1) \ln 1 = 0 \\ 2) \ln e^x = x \\ 3) \ln x = 2 \text{ يك افغ } x = e^2 \\ 4) \ln x = -2 \text{ يك افغ } x = e^{-2} \end{array}$$

3. الاشتقاق:

$$\begin{array}{l} f(x) = \ln(5x+2) \\ f'(x) = \frac{5}{5x+2} \\ g(x) = 2x \ln x \\ g'(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 \end{array}$$



### ملاحظة خطيرة:

رد بالك دبرهم حالات عدم التعيين

$$\frac{\infty}{0} = \infty \quad , \quad \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{A}{0} = \infty \quad , \quad \frac{A}{\infty} = 0$$

### 3. لعفـ ايسن اللي لازم تعرفها :

1. إثبات  $y = ax + b$  هو مستقيم مقارب

مائل بجوار  $\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

2. الوضعية النسبية بين المستقيم والدالة:

لازمك تدرس إشارة الفرق

$$f(x) - (ax + b) < 0 \quad (c_f) \text{ تحت } (\Delta)$$

$$f(x) - (ax + b) > 0 \quad (c_f) \text{ فوق } (\Delta)$$

مثال:  $f(x) = x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

- اثبت ان  $y = x - 2$  هو مستقيم مقارب

مائل بجوار  $+\infty$  ..... نطبق القانون

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 2 + \frac{\ln x}{x} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

ومنه  $y = x - 2$  هو مستقيم مقارب مائل

- ادرس الوضعية النسبية

نقوم بدراسة إشارة الفرق ..... شوف معايا

$$f(x) - (x - 2) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\ln x = 0 \quad \text{افغ } x = 1$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - (x - 2)$		0	+
الوضعية	$(c_f)$ تحت $(\Delta)$	نقاط	$(c_f)$ فوق $(\Delta)$

### ملحوظة:

كي يكون  $\ln x < 0$  يعني ان  $0 < x < 1$

كي يكون  $\ln x > 0$  يعني ان  $x > 1$

3. المستقيم المقارب العمودي وإثباته:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

نقول في هذه الحالة ان  $x = a$  هو مستقيم

مقارب عمودي وتلقاه في مجموعة التعريف وهو

العدد موش معرفت فيه الدالة ..... بينا اتنا

مثال:  $f(x) = \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

اذن  $x = 0$  هو مستقيم مقارب عمودي

4. المستقيم المقارب الأفقي وإثباته:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

نقول في هذه الحالة ان  $y = a$  هو مستقيم

مقارب أفقي وتلقاه في النهاية ايات كي نجري رابع

حسب النهاية عند  $\infty$  ..... بينا اتنا

$$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2 + \frac{\ln x}{x} \right] = 2$$

اذن  $y = 2$  هو مستقيم مقارب أفقي

5. معادلة التماس:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

مثال:  $f(x) = x^2 + 7x + 5$

احسب التماس عند  $x_0 = -2$

$$f'(x) = 2x + 7 \quad \text{حسب المشتق}$$

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$$

$$y = 3(x + 2) - 5 = 3x + 1$$

إذا قال لك احسب التماس عند  $x_0 = -2$  في هذه

الحالة لازمك تحوس على  $x_0$  روع حل المعادلة



$f(x) = -2$  كفي تلقى  $x_0$  هذيك السـاعة  
احسب المماس عند  $x_0$  .. هـ \_\_\_\_\_ كما هو

6. نقطت الانعطاف: \_\_\_\_\_

$f''(x) = 0$  نجد النقطت  $(x_0, f(x_0))$

مثال:  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 11$

نحسب المشتق الاول  $f'(x) = 3x^2 + 12x$

نحسب المشتق الثاني  $f''(x) = 6x + 12$

$f''(x) = 0$  كافى  $6x + 12 = 0$

\_\_\_\_\_ كافى  $x = -2$

$\omega(-2, f(-2))$  إذن  $\omega(-2, 5)$

والمشتق الثاني اني يغير اشارته عند  $\omega$

ملحوظة: إذا انعدم المشتق الاول عند  $\omega$  ولم

يغير اشارته فنقول ان  $\omega$  هي نقطت انعطاف

7. نقاط تقاطع المنحنى  $C_f$  مع المحاور:

ا. مع محور الفواصل : ساوي الدالة بالصفر

$f(x) = 0$  تلقى قيم  $x$  لي تقطع

ب. مع محور الترتيب : عوض  $x$  بالصفر في الدالة

$f(0) = y_0$  تلقى قيمت  $y_0$  لي تقطع فيها

8. التناظر: \_\_\_\_\_

ا. مركز تناظر:  $\omega(\alpha, \beta)$

$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

مثال: مثلا \_\_\_\_\_ ون يلك احسب

$f(6 - x) + f(x)$  كفي نحسب وتلقى النتيجة

مثلا تساوي 8 قولو نستنتج بلي النقطت  $(3, 4)$   $\omega$

هي \_\_\_\_\_ مركز تناظر

ب. محور تناظر:  $x = \alpha$

$f(2\alpha - x) = f(x)$

9. الانسداد: \_\_\_\_\_

$g(x) = f(x + a) + b$

في هذه الحالة نقول  $(C_g)$  صورة  $(C_f)$  بالانسداد

الذي شع \_\_\_\_\_ اع  $\vec{v}(-a; b)$

مثال : شر كيفة إنشاء  $(C_g)$  انطلاقا من  $(C_f)$

$f(x) = \ln x$  و  $g(x) = \ln(x + 2) + 3$

$(C_g)$  صورة  $(C_f)$  بالانسداد الـ \_\_\_\_\_ ذي

شع \_\_\_\_\_ اع  $\vec{v}(-2; 3)$

10. عفايس المعاملات:  $a$  و  $b$  و  $c$

1. كفي يلك اوجد المعاملات  $a$  و  $b$  و  $c$  ويقلك

بلي  $(C_f)$  يشمل النقطت مثلا  $A(4; -2)$  ويقل

مماس عند  $A$  معامل توجيهت 6 ويشمل ذروة

او قيمت حديت هي  $B(3; 5)$  ولديت مماسا موازيا

لمحور الفواصل اي افقي عند الفاصلت -1 ..

شوف معايا واشن نكتب :

$f(4) = -2$  .. معناه يشمل النقطت  $A(4; -2)$

$f'(4) = 6$  .. معناه يقبل مماسا عند النقطت  $A$

الذروة  $B(3; 5)$  فيها زوج معادلات تشملها الدالة

وتعدم المشتق  $f(3) = 5$  و  $f'(3) = 0$

$f'(-1) = 0$  .. معناه يقبل مماسا افقي عند -1

2. كفي يعطيك العبارة ويقولك جيب  $a$  و  $b$  و  $c$

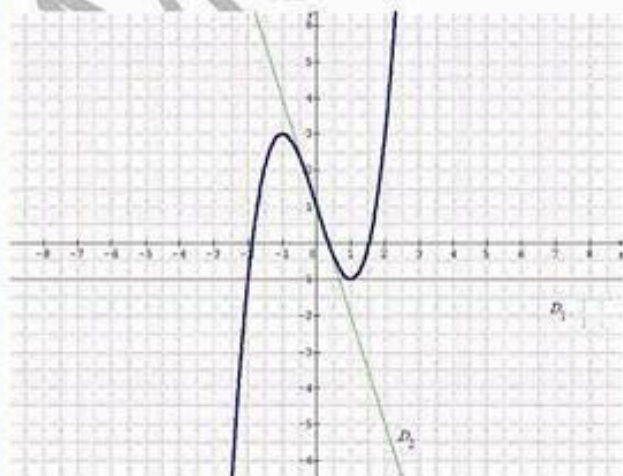
هنا بين توخذ المقامات وتطابق مكله نريدو نفصلو

3. كفي يعطيك بيان ويقلك  $(C_f)$  يقبل مماسا  $D_1$

عند الفاصلت 1 ويقبل مماسا  $D_2$  عند الفاصلت 0

ويقلك عين من البيان :

$f(2)$  و  $f'(1)$  و  $f'(0)$  كما هو موضح هنا





3. *How do you think about the future of the Chinese economy?*

يعني ثلاث حلا \_\_\_\_\_ ول



٥. قانون التكامل بالتجزئة ما ننسوهش

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int g \cdot f' dx$$

باه نحسب بالتكامل بالتجزئة لازمك تقسم الدالة إلى دالتين اطلعهم أسهل طريقة للحساب هو الجزء لي دالتة الأصلية تجيك ساهلت هولي ديرو المشتق

مثال: نحسب التكامل  $2x \ln x$

نورماطوا  $2x$  هي لي دالتها الأصلية نجينا ساهلت مالا هي لي نديروها المشتق  $\ln x$  وفع معايا

$$f'(x) = 2x \dots \dots \dots f(x) = x^2$$

$$g(x) = \ln x \dots \dots \dots g'(x) = \frac{1}{x}$$

هيا نعوض  $\ln x$  وفع في القانون

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} x^2 dx$$

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int x dx$$

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + c$$

ومنت الدالة الأصلية نتاع  $2x \ln x$

$$x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + c$$

ولي ما فقهمنيشن يروح يدير رقيت شرعية عند كاش طالب ملـيع..... بالشقاء .

16. حساب مساحة حيز بالتكامل:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

كي يقلك احسب مساحة الحيز لي بخصر الدالة

$$f(x) = x^2 \text{ والمستقيم } y = x - 1$$

والمستقيمين  $x = 1$  و  $x = 2$  من الإنشاء نلاحظ

المنحنى نتاع الدالة مربع فوق المستقيم يعني نديرو

الدالة ناقص المستقيم والنتائج نحسبها بالتكامل ناعو

شوف معايا عارفك مـفـهمـنيـشن

$$S = \int_1^2 (f(x) - y) dx =$$

$$S = \int_1^2 (x^2 - (x - 1)) dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x$$

نعوضو بالـ 2 ومبعد نقصولو النتيجة ناع 1 شوف

$$S = \left( \frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{2} 2^2 + 2 \right) - \left( \frac{1}{3} 1^3 - \frac{1}{2} 1^2 + 1 \right)$$

$$S = \frac{11}{3} \text{ us}$$

بعد احسب اضرب النتيجة في وحدة الرسم

17. المعادلات التفاضلية:

نقترح اكل هو  $f(x)$  يعني حلها عبارة عن دالة

$$y' = ay \text{ الشكل 1.}$$

$$f(x) = ce^{ax} \text{ و } y' = ay \text{ اكل هو}$$

$$f(x) = ce^{2x} \text{ و } y' = 2y \text{ اكل هو}$$

$$f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a} \text{ و } y' = ay + b \text{ اكل هو}$$

$$f(x) = ce^{2x} - \frac{3}{2} \text{ و } y' = 2y + 3 \text{ اكل هو}$$

مثال: الهدف هو حل المعادلة (1)

$$y' - 2y = (x - 3)e^x \dots \dots \dots (1).$$

1. اوجد  $a$  و  $b$  حتى تكون  $u(x) = (ax + b)e^x$

حلال للمعادلة (1) ..... نعوض ونطابق فقط

$$u' - 2u = (x - 3)e^x$$

روح اشتق  $u$  وزيدها  $-2u$  وعوض هـما في

المعادلة وطابقهما مع الطرف الآخر رايـع تلقى

$$b = 2 \text{ و } a = -1$$

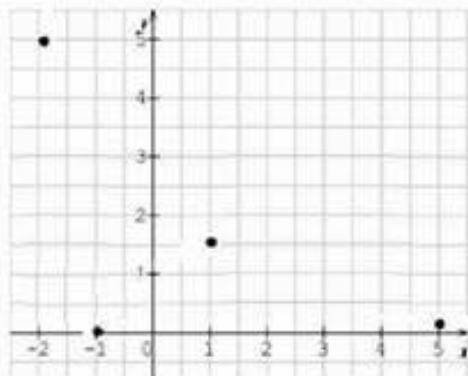
$$u(x) = (-x + 2)e^x \text{ إذن}$$

$$y' - 2y = 0 \dots \dots \dots (2) \text{ حل المعادلة}$$

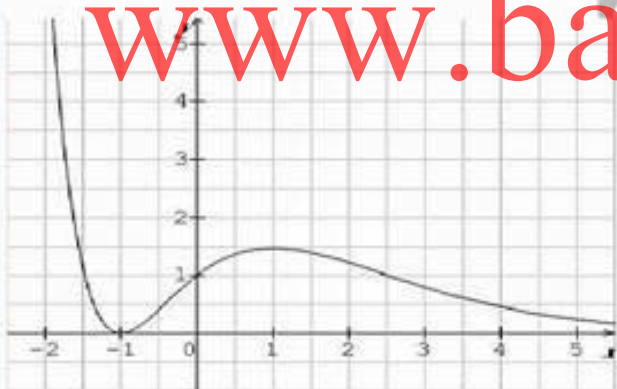
$$y(x) = ce^{2x} \text{ إذن اكل هو}$$



تفـاـهـمـنا نكتبوها هـكـا  $(-2; 5)$  يعنى  $+\infty$   
نبدلـوها نديروها 5 ومنبعد يهبط المنحنى الى  
النقطة  $(-1; 0)$  ومنبعد يزيد يطلع  $(1; 3/2)$   
ومنبعد يهبط في الاخير الى  $(-2; 5)$ . روح علم  
النقطة في المعلم كيما هـكـا شوف النقطة السوداء



منبعد نوصلو بين النقطة بالكانات شوف كيفاه بولي



سر النجاح

هو المحافظة على الصلوات ففي  
سجودك ارفع مشاكلك وهمومك الى

رب السماوات

تفكر ربك في الرخاء يتفكر في الشدة

3. نعتبر حلول (1) هي  $y + u$  اذن استنتاج

$$f(x) = y(x) + u(x) \quad \text{اكلول}$$

$$f(x) = ce^{2x} + (-x + 2)e^x$$

$$f(0) = 5 \quad \text{استنتج اكل اخاص حيث}$$

$$f(0) = ce^0 + (-0 + 2)e^0 = 5 \quad \text{نعوض}$$

$$c = 3 \quad \text{ومنه نجـد}$$

ومنه حلول (1) هي

$$f(x) = 3e^{2x} + (-x + 2)e^x$$

نحب تزيد تبسطها اعرج  $e^x$  املا مشتركا

$$f(x) = (3e^x - x + 2)e^x$$

18. كيفيت رسم منحنى الدالة:

عندنا جدول تغيرات حبينا نرسمو منو منحنى الدالة  
تد معايا واشن رايجين نديرو

$x$	-2	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	0	0

نرسمو معلم ونعينو عليه احداثيات النقطة شوف

معاياي فوق جدول التغيرات الي راهم في خانة

ننا  $x$  هذوك عبارة على فواصل ولي راهم لتحت

في مكانة ننا  $f(x)$  عبارة على ترتيبات بمعنى

هذيك -2 ترتيبت ناعها  $+\infty$  وال -1 ترتيبتها

0 ومنبعد عندنا 1 ترتيبتو  $3/2$  والاخرة  $+\infty$

ترتيبها 0 الخطوة المهمت حنا حبينا هذيك  $+\infty$

نديروها شغل عدد حقيقي يساوي 5 ولا 8 كيما

نحب انك مثلا في هذا المثل نديروها تساوي 5 باه

نسهلو العملية هي

المنحنى يبدأ من  $(-2; +\infty)$  و هي كيما



## الهندسة الفضائية

### 1. المسافات بين نقطتين:

$$A(2; 3; 5) \text{ و } B(-1; 4; 2)$$

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2 + (2-5)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-3)^2}$$

$$AB = \sqrt{19}$$

المسافة  $AB$  هي نفسها  $BA$  كيف كي

### 2. المسافات بين نقطتين ومستوي:

لتكن النقطتين  $A(-2; 3; 4)$  والمستوي  $(P)$

$$(P): x + 2y - 3z - 6 = 0$$

$$d = \frac{|1(-2) + 2(3) - 3(4) - 6|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-3)^2}}$$

$$d = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

### 3. شرطي التعامد والتوازي:

لهما قلب الهندسة الفضائية

ا. شرط التعامد:  $\vec{u}(2; 3; -2)$  و  $\vec{v}(1; 2; 4)$

نقول على ان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$1(2) + 2(3) + 4(-2) = 0$$

ومنه الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان

ا. شرط التوازي:  $\vec{u}(2; -1; 4)$  و  $\vec{v}(6; -3; 12)$

نقول على ان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متوازيان إذا كان  $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

$$\frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} = \frac{12}{4} = 3$$

ومنه الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متوازيان

ملحوظة:

نقول على ان النقط  $A, B, C$  تعين مستوي او

ليست على استقامة واحدة يكفي فقط ان تثبت

بلي  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيا يعني

غير متوازيان

### 4. معادلات ديكارتية لمستوي:

ا. يشمل  $A$  و  $\vec{n}$  ناظمي له:

المستوي يفوت بالنقط  $A(-2; 1; 4)$

و  $\vec{n}(5; -4; 3)$  ناظمي عليه شوف اكتب الشكل

العامة للمستوي وعوض

$$(p): ax + by + cz + d = 0 \text{ الشكل العام}$$

عوض الناظمي فتجد  $5x - 4y + 3z + d = 0$

عوض النقط  $A$  ثل في قيمة  $d$

$$5(-2) - 4(1) + 3(4) + d = 0$$

يكافئ  $d = 2$  ومنه المعادلة هي

$$(p): 5x - 4y + 3z + 2 = 0$$

ب. يشمل النقط  $A, B, C$ :

$C(-1; 2; 4)$  و  $B(2; 3; 2)$  و  $A(1; 1; -1)$

نفرض الناظمي  $\vec{n}(a; b; c)$  و لربك  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$

شعاعي توجيه المستوي وديما يكونو معامدين

لناظمي  $\vec{n}$  معناه كي نظريهم في الناظمي الناتج 0

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \text{ يعني ان } \vec{n} \text{ يعامد } \vec{AB}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \text{ يعني ان } \vec{n} \text{ يعامد } \vec{AC}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -2a + b + 5c = 0 \end{cases} \text{ افرض } a \text{ او } b \text{ او } c$$

وساويها مثلا ب 1 ثم حل اكملت تلقى البقي

كي تلقى الناظمي  $\vec{n}$  وعندك واحدة من هذوك النقط

$A, B, C$  نفس خطوات المستوي لي قبلو  $(p)$

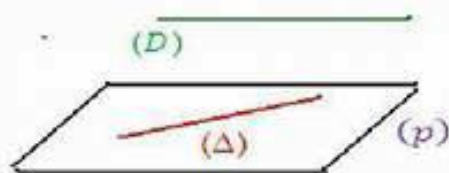
ج. يشمل  $A$  ويعامد مستقيم  $(\Delta)$ :

دير في بالك بلي  $\vec{u}$  شعاع توجيه المستقيم  $(\Delta)$  هو

يعتبر الناظمي  $\vec{n}$  نتاج المستوي وعندك النقط  $A$

هواش قاعد تستنى !!!!

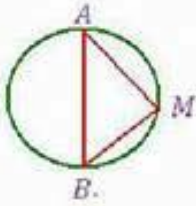
د. مستوي يكون مستقيم  $(\Delta)$  ووازي  $(D)$ :



يعتبر  $\vec{u}_D$  و  $\vec{u}_\Delta$  هما شعاعي توجيه المستوي  $(p)$



ج. عندك قطر لها مثلا هو  $[AB]$  :



لازم تكون  $M \in (S)$   
في هذه الحالة يولي  
الشعاعان  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{BM}$   
متعامدان أي  
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

إذا حببت احسب

المركز  $W$  وهو منتصف القطعة  $[AB]$  واحسب  
الطول  $AB$  واقسمو على 2 هو نصف القطر وادعم  
بالقانون الأول

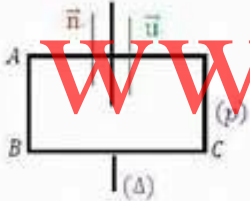
## 8. عفايس المستوي و المستقيم:

$\vec{u} \parallel \vec{n}$  يعني  $(\Delta) \perp (p)$

$\vec{u} \perp \vec{n}$  يعني  $(\Delta) \parallel (p)$

وإذا قالك بين أن المستقيم  $(\Delta)$  يعامد المستوي

$(ABC)$  شوف معايا



اثبت أن الناطمي  $\vec{n}$

نناح المستوي موازي

$\vec{u}$  التوجيه نناح

المستقيم أو اثبت

بلي  $\vec{u}$  التوجيه نناح المستقيم يعامد  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$

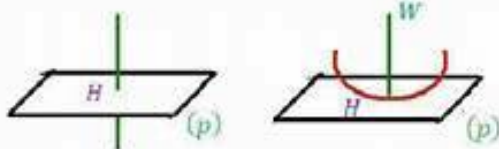
شعاعي توجيه نناح

المستوي... اسعد لي إذا كسر تلك راسك

## 9. إحداثيات المسقط العمودي أو تقاطع

مستقيم ومستوي أو نقطة تماس سطح

كرة مع مستوي:



في الحالات الثلاث نجيبو تمثيل وسيطي للمستقيم

روح جيب بيلهم الناطمي  $\vec{n}$  ومنبعد افرض قيمت  
للوسيط  $t$  وعوضها في المستقيم  $(\Delta)$  تلقى نقطت  
يفوت بيلها  $(\Delta)$  ويريد يفوت بيلها المستوي  $(p)$  ايا  
كمل أخطوات بيلك السم

## 5. تمثيل وسيطي لمسـتوي:

لازم يكون عندك زوج اشعة توجيه ونقطت  
مثلا  $\vec{u}(2; 3; -2)$  و  $\vec{v}(1; 2; 5)$  و  $A(-1; 7; 4)$   
نقولو نفرض أن  $M \in (p)$  ومنبعد نكتب

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + k\vec{v}$$

$$(t \in \mathbb{R})(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2t + k - 1 \\ y = 3t + 2k + 7 \\ z = -2t + 5k + 4 \end{cases}$$

## 6. تمثيل وسيطي لمسـتقيم $(\Delta)$ :

ا. يشمل  $A$  و  $\vec{u}$  توجيه ها لـ:

لازم يكون عندك شعاع توجيه ونقطت مثلا

$A(3; -2; 4)$  و  $\vec{u}(5; 3; -2)$

$M \in (\Delta)$  ومنبعد نكتب

$$(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -2t + 4 \end{cases}$$

ج. يشمل النقطتين  $A$  و  $B$ :

دير في بالك بلي  $\overrightarrow{AB}$  هو نفسه  $\vec{u}$  شعاع توجيه

المستقيم  $(\Delta)$  وعندك زوج نقاط  $A$  و  $B$  عوض

واحدة فيهم وربيع عوضلك الأيام أكلوة

ج. يشمل  $A$  ويعامد مستوي  $(p)$ :

منبقاوش نعاودو في الهدرة عندك الشعاع الناطمي

$\vec{n}$  نناح  $(p)$  يعتبر شعاع توجيه المستقيم  $(\Delta)$

وعندك النقطت  $A$  ايا توكل على ربي

## 7. معادلت سطح كرة $(S)$ :

إذا كان عندك المركز و القطر رالك ديرت لافير

ا. مركزها  $W$  ونصف قطرها  $R$ :

لازم تكون  $M \in (S)$  ولازم تفلو بلي  $WM = R$

نفرض المركز  $W(5; 3; -7)$  ونصف القطر  $R = 2$

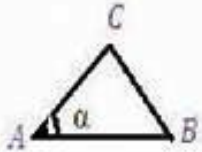
$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2 = 2^2 = 4$$



2. الطريقة الثانية : هنا لازمك تكتب ديجا اكتب  
الطول  $AM$  بدلالة  $t$  جييك دالت نناع جذر روح  
اشتقها والقيمة اكدية هي المسافة بين  $A$   
و  $(\Delta)$ ... اسمع متقول كتي واحد عليها بيناتنا

### 11. مساحة مثلث $ABC$ :

إذا كان المثلث  $ABC$  كيفي  
وعندك زاوية من زواياه  
طبق القانون



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

اما إذا كان  $\alpha = 90^\circ$  فان المثلث يصبح قائما يكفي  
ان نكتب  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

### 12. حجم رباعي الوجوه $DABC$ :

مساحة القاعدة وهي مساحة المثلث في الارتفاع  
و يكون عمودي على المثلث نقسمهم على 3  
نفرض ان  $AD$  عمودي على المثلث  $ABC$  اذن

$$V_{DABC} = \frac{S_{ABC} \cdot AD}{3}$$

### 13. الأوضاع النسبية :

أ. الوضع النسبي لمستقيم ومستوي :

نعوض التمثيل الوسيط للمستقيم في المعادلات  
الديكارتيّة للمستوي

1. إذا لقيت قيمة للوسيط  $t$  معناه يتقاطع في

نقطت تقدر تروح جييك

2. إذا لقيت تناقض مثلا جييك  $3 = 0$  باين بلي

مايتقاطعوش وتقاطعهم مجموعة خالية

3. إذا لقيت ان المعادلات محققة دوما مثلا جييك

$0 = 0$  يعني ان المستقيم محتوي في المستوي او

نقول بلي هو احد مستقيمات المستوي

4. روح اقر العنوان 8 عفايس المستقيم والمستوي

ونعوضه في معادلات المستوي  $(p)$  نلقاو قيمة  
 $t$  ومنبعد نعوضو  $t$  في التمثيل الوسيط نناع  
المستقيم نلقاو النقطة  $H$  لازمك دير في بالك بلي  
المستقيم يعامد المستوي معناه الناطمي نناع  
المستوي هو التوجيه نناع المستقيم.... هكا هو

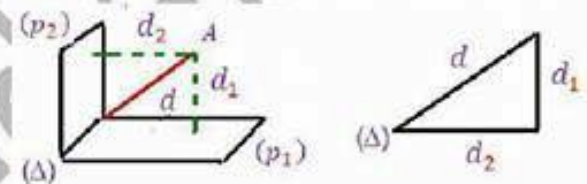
### 10. المسافات بين نقطتين ومستقيم :

هنا لازمك تخط راسك معايا قول بسم الله

أ. إذا كان المستويان متعامدان ومقاطعان

وفق مستقيم :

حسب نظرية الشيع فيثاغورث  $d^2 = d_1^2 + d_2^2$



حيث ان  $d$  هي المسافة بين  $A$  والمستوي  $(p_1)$   
و  $d_2$  هي المسافة بين  $A$  والمستوي  $(p_2)$  و ان  $d_1$   
هي المسافة بين  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$

ب. إذا كان معتركين المستويان :

1. الطريقة الاولى : روح اكتب المستقيم على شكل

نقطت  $M$  شوف معايا وتعلم واشن راح نديرو

$$M \in (\Delta) \quad \begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 3t \\ z = -2t + 4 \end{cases} \quad (\Delta)$$

يعني تولي  $M$  هكا  $M(5t + 3; 3t; -2t + 4)$



راك تشوف الشعاع  $\overrightarrow{AM}$  يعامد شعاع  $\vec{u}$  توجيه

المستقيم  $(\Delta)$  مالا روح اكتب الشعاع  $\overrightarrow{AM}$  بدلالة

$t$  ومنبعد طبق قانون التعامد  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$  تلقى

قيمة الوسيط  $t$  ومنبعد عوض  $t$  في النقطة  $M$

تلقى النقطة  $M$  ومنه المسافة هي الطول  $AM$



### ج. الوضع النسبي لمستقيم و سطح كرة:

ياحليلو لي نسبي الامير  $\Delta$  لازماتو عقوبة في حق طاط  
نعوضو التمثيل الوسيط للمستقيم في معادلات  
سطح كرة نجينا معادلات من الدرجة الثانية بدلات  
الوسيط  $t$  نحسبها بالامير  $\Delta$  الامير نتاع بكري  
1. إذا لقيت الامير  $\Delta < 0$  لا يوجد تقاطع  
2. إذا لقيت الامير  $\Delta = 0$  نقولو بلي المستقيم  
يمس سطح الكرة في نقطة واحدة  
3. إذا لقيت الامير  $\Delta > 0$  باين تقاطع في نقطتين  
تقدر تروح تحسبهم متكسر ليشن راسي من فضلك

### ج. الوضع النسبي لمستوي و سطح كرة:

نحسب المسافات بين المستوي ومركز سطح الكرة  
1. إذا لقيت المسافة أكبر من نصف القطر معناه  
مكانش تقاطع اي تقاطعهم مجموعة خالية  
2. إذا لقيت المسافة تساوي نصف القطر معناه  
تماس اي المستوي يمس سطح الكرة  
3. إذا لقيت المسافة أصغر من نصف القطر معناه  
المستوي يقطع سطح الكرة في دائرة  
د. مستقيم ما من نفس المستوي او

### ليس من نفس المستوي:

1. إذا كان المستقيمان متوازيان فهما من نفس  
المستوي هذه دبرها في بالك صد  
2. إذا كان موش متوازيان هنا فيها حالتين  
نروحو نساويهم مع بعض

$$x = x \quad (1)$$

$$(D) \quad y = y \quad (2) \quad (\Delta)$$

$$z = z \quad (3)$$

راهم عندك ثلاث معادلات من المعادلتين  
(1) و (2) جيب قيمت الوسيطين  $t$  و  $k$   
وعوضهم في المعادلات (3)

- إذا كانت محققة نقولو من نفس المستوي  
- موش محققة موش من نفس المستوي

### 14. مجموع اات النقط :

اغلبيتهم عندهم علاقة بالمرجع و ياحليلو لي موش  
فاهم المرجع بصح ساهلت مت افش

1. إذا لقيت  $GM = 3$ .....

نقولو مجموعة النقط  $M$  هي سطح كرة مركزها  $G$   
ونصف قطرها 3

2. إذا لقيت  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ .....

نقولو مجموعة النقط  $M$  هي سطح كرة قطرها  $[AB]$   
3. إذا لقيت  $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .....

نقولو مجموعة النقط  $M$  هي مستوي الذي يشمل  
النقط  $G$  والشعاع  $\overrightarrow{AB}$  ناظمي على  
3. إذا لقيت  $AM = BM$ .....

نقولو مجموعة النقط  $M$  هي مستوي الذي هو  
محور القطعة  $[AB]$  او نقول هو المستوي الذي  
يشمل منتصف  $[AB]$  والشعاع  $\overrightarrow{AB}$  ناظمي له  
اذا كان فاهميتي موش روك عليه الباك

الثقت بالنفس بعد التوكل على الله  
مطلوبة شرعا ،

فالمسلم يتعين عليه أن يحسن الظن  
بالله تعالى.....

وأن يتفائل لنفسه أخير والنجاح  
دائماً....

ويسعى باستمرار في سبيل الارتقاء  
لتحصيل الكمالات



## الأعداد المركبة

ماعليش دخل في راسك بلي  $i^2 = -1$

### 1. طويلة عدد مركب $|Z|$ :

ليكن العدد المركب  $Z = -4 + 3i$

$$|Z| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

اطونسيو دخل  $i$  في الطويلة رالك دير كـارث

### 2. عمدة عدد مركب $\theta = \arg(Z)$ :

علا بالي بيلك نكره  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  اصبر معايا

لازمك تعرفه تحسب الطويلة باه تحسب العمدة

مثال: ليكن العدد المركب  $Z = -1 + \sqrt{3}i$

تحسبو الطويلة نجينا

$$|Z| = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

من الدائرة المثلثية الربع

لي  $\cos$  سالب و  $\sin$  موجب هو الربع الثاني يعني

هي الزاوية  $\frac{\pi}{3}$  في الربع الثاني نولي  $\pi - \frac{\pi}{3}$

نعطيك عفسة مليحة شوف كيفاه تعرفه

الروايا الشهيرة  $Z = x + yi$

$x > y$  يعني الزاوية  $\frac{\pi}{6}$  مثلا  $Z = \sqrt{3} + 1i$

$x < y$  يعني الزاوية  $\frac{\pi}{3}$  مثلا  $Z = 1 + \sqrt{3}i$

$x = y$  يعني الزاوية  $\frac{\pi}{4}$  مثلا  $Z = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$

$x = 0$  يعني الزاوية  $\frac{\pi}{2}$  مثلا  $Z = \sqrt{3}i$

اما الإشارة تدل على الربع روح لدائرة المثلثية

كيما ديرنا المثلث السابق عرفنا الزاوية والربع وحسبنا

### 3. مرافق عدد مركب $\bar{Z}$ :

$Z = 4\sqrt{3} + 4i$  مرافقه  $\bar{Z} = 4\sqrt{3} - 4i$

المهم اعكس إشارة الجبرء التخيل لي

## 4. الشكل الأسّي:

كي تحسب الطويلة والعمدة طبق  $Z = |Z|e^{i\theta}$

العدد المركب السابق  $Z = -1 + \sqrt{3}i$  طويلته 2

وعمدته  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  نعوض في القانون يصبح

$$Z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

## 5. الشكل المثلثي:

كيفه عوه طبق القانون هذا

$$Z = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

من المثلث السابق  $Z = -1 + \sqrt{3}i$  عندك الطويلة

$$Z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

## 6. الشكل الجبري:

هذا راهو مكتوب كتابت جبريت  $Z = -1 + \sqrt{3}i$

المشكل كيفاه نروح من الأسّي والمثلثي إلى الجبري

دير في بالك هذو  $\frac{1}{2} = 0.5$  و  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$  و

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$  هذو الروايا الشهيرة باه نجينا ساهلت

الانتقال من الأسّي والمثلثي إلى الجبري شوف المثلث

$$Z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$Z = 2(-0.5 + i0.866)$$

$$Z = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$$

## 7. عفايس الشكل $a = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ :

$$a = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$$

ا. إذا كان  $ai$

$a$  سالب فإن الزاوية  $-\frac{\pi}{2}$

$a$  موجب فإن الزاوية  $\frac{\pi}{2}$

1. إذا كانت  $a = 1$  أو  $a = -1$  في هذه أكاله

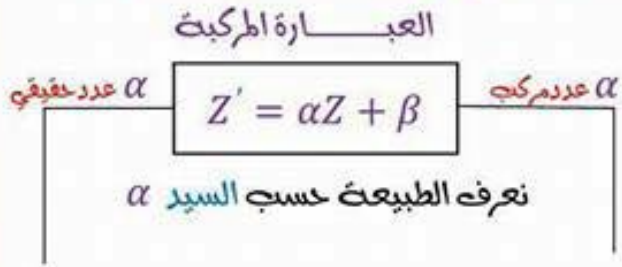
نقول ان المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين

2. إذا كانت  $a \neq 1$  و  $a \neq -1$  في هذه أكاله

نقول ان المثلث ABC قائم في B ف فقط



## 10. التحويلات النقطية:



$|\alpha| = 1$  دوران       $\alpha = 1$  انسحاب

$|\alpha| \neq 1$  تشابه مباشر       $\alpha \neq 1$  تحاكي

### العناصر المميزة لتحويلات:

1. نسبته هي  $|\alpha|$  بالنسبة لدوران والتشابه

اما بالنسبة لتحاكي والانسحاب النسبة هي  $\alpha$

2. الزاوية هي  $\arg(\alpha)$

3. المركز هو  $w$  حيث  $Z_w = \frac{\beta}{1-\alpha}$

ملاحظة: المركز  $w$  هو النقطة الصادرة يعني

تحويلها هو نفسها معناه  $Z_w = \alpha Z_w + \beta$

كيفية إيجاد  $Z_C$  حيث  $C$  صورة  $A$  بالتحويل

النقطي الذي مركزه  $B$  (دير في بالك بلي  $Z_C$  تحي في

بلاصت  $Z'$ ) اكتب مباشرة الجملة

$$Z_C = \alpha Z_A + \beta$$

$$Z_B = \alpha Z_B + \beta$$

$$Z_C - Z_B = \alpha(Z_A - Z_B)$$

إذا عطاك مثلا دوران وقالك مركزه  $O$  دير في بالك

بلي  $\beta = 0$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  متنساش بلي  $|\alpha| = 1$  اي

العبارة المركبة بالشكل الاسي هي  $Z' = 1e^{i\frac{\pi}{2}} Z$

وإذا حبيت تكتبها على الشكل الجبري  $Z' = iZ$

## 11. المرجع $G = \{(A, -1)(B, 2)(C, 2)\}$ :

$$Z_G = \frac{-Z_A + 2Z_B + 2Z_C}{-1 + 2 + 2}$$

إذا قالك مركز ثقل مثلث ه المعاملات 1.1.1

$$ج. إذا كان  $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$$

باين المثلث  $ABC$  متساوي الساقين

$$ج. إذا كان  $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$$$

إذا لقيت  $a$  عدد حقيقي يعني ان النقط  $C, B, A$

على استقامة واحدة يعني  $\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BC}$

$$د. إذا كان  $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$$$

نقدرو نكتبوه من الشكل  $Z_A - Z_B = a(Z_C - Z_B)$

نقول يوجد تحويل نقطي وطبيعته حسب السيد  $a$

$$\text{ملحوظة: } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = \pm 1$$

تلقاه 1 نقول  $ABDC$  متوازي اضلاع  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$

تلقاه -1 نقول  $ABCD$  متوازي اضلاع  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

## 8. تفسير الهندسي لشكل $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$ :

1. الطوليت:  $|BA| = a|BC|$

2. العمدة:  $\arg(a) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$

## 9. دستور مواف:

$$Z^n = |Z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ساعات يملك اوجد قيمته  $n$  حتى يكون:

يكون  $Z^n$  حقيقي صفا: يعني  $\sin n\theta = 0$

وهذا يكافئ  $n\theta = k\pi$  ومنبعد جيب قيمته  $n$

إذا كان  $k$  زوجي يولي  $Z^n$  حقيقي موجب

إذا كان  $k$  فردي يولي  $Z^n$  حقيقي سالب

يكون  $Z^n$  تخيلي صفا: يعني  $\cos n\theta = 0$

وهذا يكافئ  $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ومنبعد جيب  $n$

إذا كان  $k$  زوجي يولي  $Z^n$  تخيلي موجب

إذا كان  $k$  فردي يولي  $Z^n$  تخيلي سالب

متنساش بلي  $n$  عدد طبيعي يعني  $k$  يكون طبيعي

$$\text{ساعات يملك احسب مثلا: } Z = 2e^{\frac{2016\pi}{3}i}$$

$$Z = 2e^{\frac{2016\pi}{3}i} = 2(\cos \frac{2016\pi}{3} + i \sin \frac{2016\pi}{3})$$

$$Z = 2(1 + i0) = 2$$



## 12. طبيعة الرباعيات:

ليكن الرباعي ABCD حيث قطراه [AC] و [BD]



1. متوازي اضلاع:

يكفي ان تثبت ان القطران متناصان فان

او  $\overline{AB} = \overline{DC}$  يعني  $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$

ب. مستطيل: لازم يكون فيه  $\overline{AB} = \overline{DC}$

اما ان تثبت ان القطران [AC] و [BD] متساويان

وموش متعامدان او  $AB \neq BC$  وزيد متعامدان

ج. المربع: لازم يكون فيه  $\overline{AB} = \overline{DC}$

اما ان تثبت ان القطران [AC] و [BD] متساويان

ومتعامدان او  $AB = BC$  وزيد متعامدان

د. المربع: لازم يكون فيه  $\overline{AB} = \overline{DC}$

اما ان تثبت ان القطران [AC] و [BD] متساويان

ومتساويان ومتعامدان او  $AB = BC$  وزيد

م. متعامدان: لازم يكون فيه  $\overline{AB} = \overline{DC}$  وزيد

ملاحظة: كي يكون عندك  $\overline{AB} = \overline{DC}$  وزيد

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = ai$$

عندك هذا الشكل

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

الـ دوران:

$$\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

التشابه المباشرة:

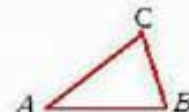
$$\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$$

## 13. المثلثات:

احسب الاطوال  $AB = AC = BC$

باين نقول ان المثلث ABC

متقايس الاضلاع



واذا كان  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  نقول ان المثلث ABC قائم في A واذا كان  $AB = AC$  زيد متساوي الساقين

## 14. مجموعات النقط:

1. اذا لقيت  $GM = 3$

نقولو مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G

ونصف قطرها 3 .. (ياو رانا في الاعداد المركبة

رد بالك تقو ..... ول سطح كرة)

2. اذا لقيت  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

نقولو مجموعة النقط M هي دائرة قطرها [AB]

3. اذا لقيت  $\overline{GM} \cdot \overline{AB} = 0$

نقولو مجموعة النقط M هي مستقيم الذي يشمل

النقط G والشعاع  $\overline{AB}$  ناظمي عليه

4. اذا لقيت  $|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$

يعني  $AM = BM$  نقولو مجموعة النقط M هي

مستقيم الذي هو محور القطعة [AB] او نقول

هو المستقيم الذي يشمل منتصف [AB] والشعاع

$\overline{AB}$  عمودي عليه

5. اذا لقيت  $arg(Z - Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

نصف مستقيم (AM) مبدؤه النقط A

6. اذا لقيت  $Z - Z_A = 2e^{i\theta}$

هنا الطول ثابت وهو 2 ولكن الزاوية متغيرة يعني

راجع رسمنا دائرة مركزها A ونصف قطرها 2

.....

اكثرنا من الصلاة والسلام على النبي

المختار يفتح الله عليكم ابواب رحمته

ويشرح صدوركم ويزيل همومكم ويرفع

مقامكم إلى الدرجات العلى والمنازل

الشريفة



## المتتاليات العددية

دير هذو العفايس في راسك عنبري

### المتتالية الحسابية

$$v_5 = v_2 + 3r$$

$$(5 - 2) = 3$$

إذن القانـون

$$v_n = v_p + (n - p)r$$

### المتتالية الهندسية

$$v_5 = v_2 \cdot q^3$$

$$(5 - 2) = 3$$

إذن القانـون

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

$$v_1 + v_3 = 2v_2$$

إذا كانت عندك

جملت معادلتين عوضها  
في معادلتك أجمع

$$v_1 \cdot v_3 = v_2^2$$

إذا كانت عندك

جملت معادلتين عوضها  
في معادلتك الضرب

المجموع

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

عدد الحدود  $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (v_0 + v_n)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n)$$

$$S_n = v_0 \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

### 1. البرهان بالتراجع:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

برهن بالتراجع أن  $u_n > 2$

اولا نثبت صحة الشرط الابتدائي  $u_0 = 3$  ولدينا

$3 > 2$  ومنه محقق إذن صحيحة

ثانيا نفرض أن  $u_n > 2$  ونبرهن صحة  $u_{n+1}$

أي نبرهـن أن  $u_{n+1} > 2$

ندبرو عكسة تناوع أكمبر نطلق من  $u_n > 2$

نضرب الطرفين في  $\frac{1}{2}$  .....  $\frac{1}{2} u_n > \frac{1}{2} \cdot 2$

نضيف لطرفين  $1 + 1$  .....  $\frac{1}{2} u_n + 1 > 1 + 1$

إذن تصبح  $u_{n+1} > 2$  ..... ومنه صحيحة

إذن  $u_n > 2$  صحيحة مهما يكن  $n$  طبيعي

ملحوظة:

كل استنتاج يأتي بعد البرهان بالتراجع نقول بلي

( $u_n$ ) محدودة من الأسفل أو الأعلى شوف كيفاه

$u_n > 2$  هنا نقول محدودة من الأسفل بـ 2

$u_n < 2$  هنا نقول محدودة من الأعلى بـ 2

### 2. اتجاه التغير:

متناقص  $u_{n+1} - u_n < 0$

متزايدة  $u_{n+1} - u_n > 0$

مثال السابق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$$

نخرج  $-\frac{1}{2}$  ..... املا مشتركا فيصبح الفرق

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$$

شوف ندبرو أكمبر ونعرفوه موجب أو سالب

نقولو لدينا  $u_n > 2$

نضيف العدد -2 لطرفيـن

$$u_n - 2 > 0$$

نضرب في العدد  $-\frac{1}{2}$  ورالك عارف يتغير الاتجاه

$$-\frac{1}{2}(u_n - 2) < 0$$

إذن  $u_{n+1} - u_n < 0$  ومنه ( $u_n$ ) متناقص



### 3. التَقارب:

1. إذا لَقِبَت  $(u_n)$  متناقصَة ومحدودة من

الأسفل نقول أن  $(u_n)$  متقاربة

2. إذا لَقِبَت  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من

الأعلى نقول أن  $(u_n)$  متقاربة

3. النهاية: رُوح لِعِبارة أكد العام

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$u_n$  هي عبارة أكد العام

عُفست ال  $L$ : رُوح لِّلعبارة التراجعية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

مثال السابق: نُحسب النهاية  $L$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

بأن لَدِينَا نفس النهاية زُروحو نَدِيرُو عُفست ال  $L$

$$L = \frac{1}{2}L + 1$$

$$L - \frac{1}{2}L = 1$$

$$\frac{1}{2}L = 1 \quad L = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

وهو العدد لِي تَلقاه في البرهان بالتقارب

ملاحظة:

كل استنتاج يَجي بعد حساب نهاية عبارة

أكد العام يُقصد به التَقارب

### 4. المتتالية الثابتة:

$$u_0 = u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_{n+1}$$

أي أن:

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

### 5. كيفية إثبات متتالية هندسية:

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$

ننطلق من  $v_{n+1}$  لنصل إلى  $v_n \cdot q$  وفي هذه الحالة

نقول أن  $(v_n)$  هندسية وأساسها  $q$

مثال 1: أثبت  $v_n = e^{2n+1}$  هندسية

نضع في بلاصة  $n$  نضع  $n+1$  فنحصل

$$v_{n+1} = e^{2(n+1)+1}$$

$$v_{n+1} = e^{2n+2+1}$$

نحافظ على  $2n+1$  والعدد 2 أجدد نخرجوه

$$v_{n+1} = e^2 \cdot e^{2n+1} = e^2 \cdot v_n$$

ومن هنا هندسية وأساسها  $e^2$

مثال 2: شوف شكل آخر في إثبات الهندسية

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

أثبت أن  $v_n = u_n - 6$  متتالية هندسية

تقدر تعرف الأساس قبل ما تبدأ تترجم وهو العدد

لِي مضروب في  $u_n$  اللي هو  $\frac{2}{3}$  عليها بينا اتنا

نفس الطريقة ننطلق من  $v_{n+1}$  لنصل إلى  $v_n \cdot q$

$$v_n = u_n - 6$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$$

نعوض  $u_{n+1}$  بقيمتها فيكون عندنا

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4$$

نخرج  $\frac{2}{3}$  عـ املا مشتركا فيصبح لدينا

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

إذن هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$

وتقدر دير الطريقة نتاع القسمة  $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

دير راسلك أنت حر دير الطريقة لِي تعجبك



## 6. كيفية إثبات متتالية حسابية:

$$v_{n+1} - v_n = r$$

مثال: اثبت  $v_n = 2n + 1$  حسابية

نحسب  $v_{n+1}$  وندير الفرق بينها وبين  $v_n$  إذن

$$v_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3$$

نطبق القانون

$$v_{n+1} - v_n = 2n + 3 - (2n + 1)$$

$$v_{n+1} - v_n = 3 - 1 = 2$$

ومن هنا حسابية أساسها 2

## 7. عكس أجمالية:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = k & \dots \dots (1) \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = k' & \dots \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = k & \dots \dots (1) \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = k' & \dots \dots (2) \end{cases}$$

1. إذا كانت المتتالية هندسية:

$$\text{الوسط الهندسي: } v_1 \times v_3 = v_2^2$$

عوضها في المعادلة (2) نتاج الضرب تلقى  $v_2$

$$v_1 \times v_2 \times v_3 = v_2 \times v_2^2 = k'$$

$$v_2^3 = k' \text{ يكافى } v_2 = \sqrt[3]{k'}$$

بাহ نحسب الأساس  $q$ :

نكتب  $v_1$  و  $v_3$  بدلالة  $v_2$

$$v_3 = v_2 q^{3-2} = v_2 q^1$$

$$v_1 = v_2 q^{1-2} = v_2 q^{-1} = \frac{v_2}{q}$$

نعوض قيمته كل من  $v_1$  و  $v_3$  بدلالة  $v_2$  و  $q$  في

المعادلة (1) و بمان  $v_2$  عندك قيمتها يبقى

المجهول هو  $q$  بعد التعويض نجيك معادلة من

$$\text{الدرجة الثانية } aq^2 + bq + c = 0$$

بعد ما تفتحها بالهمز يكون زوج قديم لـ  $q$

عز الأساس  $q$ :

1. إذا قالك متناقصة  $0 < q < 1$  الأساس

$$\text{مثلا } \frac{3}{4} \text{ او } \frac{1}{4} \text{ او } \frac{1}{2} \text{ او } \frac{2}{3} \dots \dots \dots$$

2. إذا قالك متزايدة  $q > 1$  الأساس

$$\text{مثلا } 2 \text{ او } 3 \text{ او } \frac{3}{2} \text{ او } \frac{4}{3} \text{ او } \dots \dots \dots$$

ب. إذا كانت المتتالية حسابية:

$$\text{الوسط الحسابي: } v_1 + v_3 = 2v_2$$

عوضها في المعادلة (1) نتاج أجمع تلقى  $v_2$

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_2 + 2v_2 = k$$

$$3v_2 = k \text{ يكافى } v_2 = \frac{k}{3}$$

باه نحسب الأساس  $r$ :

نكتب  $v_1$  و  $v_3$  بدلالة  $v_2$

$$v_3 = v_2 + (3-2)r = v_2 + r$$

$$v_1 = v_2 + (1-2)r = v_2 - r$$

نعوض قيمته كل من  $v_1$  و  $v_3$  بدلالة  $v_2$  و  $r$

في المعادلة (2) و بمان  $v_2$  عندك قيمتها يبقى

المجهول هو  $r$  بعد التعويض نجيك معادلة من

$$\text{الدرجة الثانية } ar^2 + br + c = 0$$

بعد ما تفتحها بالهمز يكون زوج قديم لـ  $r$

عز الأساس  $r$ :

1. إذا قالك متناقصة  $r < 0$  السالب

$$\text{مثلا } -2 \text{ او } -3 \text{ او } -\frac{1}{4} \text{ او } -\frac{5}{4} \dots \dots \dots$$

2. إذا قالك متزايدة  $r > 0$  الموجب

$$\text{مثلا } 2 \text{ او } 3 \text{ او } \frac{1}{4} \text{ او } \frac{5}{4} \dots \dots \dots$$

..... نتمنى إن شاء الله فهموني.....

## 8. متتاليتان متجاورتان:

نقول على أن  $(v_n)$  و  $(u_n)$  متتاليتان متجاورتان

إذا كانت إحداها متزايدة والأخرى متناقصة

وكلما نفس النهاية يعنى

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\text{أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$



## 9. عفايس المجمع — وع:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

( $v_n$ ) متتاليته هندسيه طبق قانون المجموع

$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

إذا كانت: لتكن المتتاليه ( $u_n$ ) المعرفه بالعباره

$$u_n = v_n + 3$$

نحسب المجموع  $S'_n$  بدلالة  $n$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

بأن  $u_n = v_n + 3$

$$S'_n = S_n + 3(n+1)$$

عدد اكود

إذا كانت: ليكن المجموع  $k_n$  حيث ( $v_n$ ) هندسيه

$$k_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

قم بتربيع اكود الاول والاساس وطبق نفس القانون

$$k_n = v_0^2 \frac{q^{2(n+1)} - 1}{q^2 - 1}$$

نفس الشئ بالنسبة للمجموع  $L_n$

$$L_n = v_0^3 + v_1^3 + v_2^3 + \dots + v_n^3$$

قم بتكعب اكود الاول والاساس

$$L_n = v_0^3 \frac{q^{3(n+1)} - 1}{q^3 - 1}$$

نفس الشئ بالنسبة للمجموع  $T_n$

$$T_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

قم بقسمة اكود الاول والاساس

$$T_n = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{q} - 1}$$

.....

## النجاح —

1. تريد ان تكون مبدعاً في هذه الحياة؟؟ اول

خطوة هي الاحتكاك بالناجحين و استمع

لافكارهم و خاورهم هذه اول خطوة للنجاح

2. بعضنا ينجح بذكائه وبعضنا ينجح بغباء

الآخرين

3. إذا عرفنا كيف فشلنا نفهم كيف ننجح

4. إن النجاح لا يحتاج إلى اقدام بل إلى إقدام

5. المثابرة و النجاح توأمان الاولى مسالت

نوعيت و الثاني مسالت وقت

6. النجاح هو الانتقال من فشل إلى فشل دون

ان نفقد الأمل

7. أخوف من أي محاولة جديدة طريق ختمي

للفشل

8. عليك ان تتعلم قواعد اللعبة أولاً ، ثم

عليك ان تتعلم كيف تلعب افضل من

الآخرين

9. فشل من حولك لا يعني بالضرورة فشلك ،

لكن لا تتوقع منهم مساعدتك على النجاح

10. من الملاحظ ان الناجح هو من احسن

استغلال الوقت ، في حين ضيعت غيره

11. الناجحون يقدررون على النجاح لانهم

يعتقدون انهم يقدررون

12. اعزم وكذا فان مضيت فلا تقف ...

واصبر وثابر فالنجاح محقق إن شاء الله



## الاحتمالات

كبي يعطيك مجموعتين وبفلك  $w$  هي المجموعة الكلية و  $A$  هي المجموعة الجزئية و تمثل الأعداد الزوجية و  $B$  هي مجموعة جزئية من  $w$

$$w = \{1.2.3.4.5.6.7.8.9\}$$

$$A = \{2.4.6.8\}$$

$$B = \{7.8.9\}$$

احسب الاحتمالات التالية :  $P(A)$  و  $P(B)$  و

$$P(A \cap B) \text{ و } P(A \cup B) \text{ و } \overline{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{P(A)} = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

بطريقة أخرى يعني مجموعة  $\bar{A}$  هي عكس الأعداد الزوجية وهي الأعداد الفردية  $\bar{A} = \{1.3.5.7.9\}$

$$\overline{P(A)} = \frac{\text{عدد عناصر } \bar{A}}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{5}{9}$$

نخرج نحسب المجموعتين  $A \cap B$  و  $A \cup B$

$$A \cap B = \{8\}$$

$$A \cup B = \{2.4.6.8.7.9\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cup B}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{6}{9}$$

بطريقة أخرى حساب  $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{6}{9} = \frac{7-6}{9} = \frac{1}{9}$$

كواي لي لازم تعرفه

العاملية والترتيبات والتبديلات والقائمة والتوفيق

### 1. العاملية:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n$$

مثال احسب عاملية 5!

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$0! = 1 \text{ و } 1! = 1 \text{ متنساش}$$

### 2. الترتيبات:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

مثلا باه نحسب  $A_5^2$

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

$$A_1^1 = 1 \text{ و } A_1^0 = 1$$

### 3. التوفيق:

شوف كيفاه نحسب توتو

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثلا باه نحسب  $C_5^2$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{120}{24} = 5$$

$$C_n^1 = n \text{ و } C_n^n = C_n^0 = 1$$

### 4. التبديلات:

$$A_n^n = n!$$

هذا هو القانون

### 5. القائمة:

$$n^p$$

هذا هو القانون







الامل الرياضي هو تضرب كل حالة من الحالات لي حسبته من قانون الاحتمال في المتغير  $X$  ناعها

$$\sum_{i=0}^{i=3} X_i P_i = 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3)$$

$$= 0 \frac{35}{220} + 1 \frac{105}{220} + 2 \frac{70}{220} + 3 \frac{10}{220}$$

$$= \frac{0}{220} + \frac{105}{220} + \frac{140}{220} + \frac{30}{220} = \frac{275}{220}$$

### 9. تمرين ثاني اوسط من الأول :

صندوق به 12 كرت 5 حمراء و 3 صفراء و 4 سوداء  
نستخرج 3 كرات على التوالي بدون إرجاع  
- ماهو عدد السحب الممكنة

- ماهو احتمال ظهور 3 كرات حمراء فقط

- ماهو احتمال ظهور كرت سوداء على الأقل

ماهو احتمال ظهور كرتين صفراء على الأكثر

الإجابة

نفس الخدمة نتاع مقبيل غير نخدمو بالترتيب

عدد السحب الممكنة  $A_{12}^3 = 1320$

$$P(A) = \frac{A_5^3}{220} = \frac{60}{1320}$$

$$A(B) = \frac{A_4^1 A_8^2 + A_4^2 A_8^1 + A_4^3 A_8^0}{1320} = \frac{344}{1320}$$

$$A(C) = \frac{A_3^2 A_9^1 + A_3^1 A_9^2 + A_3^0 A_9^3}{220} = \frac{774}{1320}$$

إن أصبت فممن الله

و إن أخطأت فمن نفسي والشيطان

ناجحون بإذن الله

$C_4^1 C_8^2$  يعني واحدة سوداء وكرتين ناعزو زوج

$C_4^1 C_8^2$  يعني زوج سوداء وكرتين ناعزو وحدة

$C_4^1 C_8^2$  ثلاث سوداء وكرتين ماناعزو والو

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_8^2 + C_4^2 C_8^1 + C_4^3 C_8^0}{220} = \frac{164}{220}$$

- احتمال كرتين صفراء على الأكثر  
يعني يا زوج يا وحدة بإمكانش نفس الخدمة

$$P(C) = \frac{C_3^2 C_9^1 + C_3^1 C_9^2 + C_3^0 C_9^3}{220} = \frac{219}{220}$$

- ماهو احتمال ظهور كرتين حمراء و كرت سوداء

$$P(D) = \frac{C_5^2 C_4^1}{220} = \frac{40}{220}$$

قيم  $X$  الممكنة  $X = \{0, 1, 2, 3\}$

قانون الاحتمال هو تضرب كل حالة ونقسمها على الحالات الممكنة

$$P(x=0) = \frac{C_5^0 C_7^3}{220} = \frac{1 \times 35}{220} = \frac{35}{220}$$

$$P(x=1) = \frac{C_5^1 C_7^2}{220} = \frac{5 \times 21}{220} = \frac{105}{220}$$

$$P(x=2) = \frac{C_5^2 C_7^1}{220} = \frac{10 \times 7}{220} = \frac{70}{220}$$

$$P(x=3) = \frac{C_5^3 C_7^0}{220} = \frac{10 \times 1}{220} = \frac{10}{220}$$

باه نتحقق من حساباتك صححت قانون الاحتمال

كي نجمعهم كل الناتج بطلع 1 هيا نجربو ورب يسر

$$\frac{35}{220} + \frac{105}{220} + \frac{70}{220} + \frac{10}{220} = \frac{220}{220} = 1$$



### دعاء بدایت المذاكرة

اللهم اني اسالك فهم النبيين ، وحفظ الملائكة المقربين ، وان تجعل لساني عامراً بذكرك ، وقلبي خشيتك ، وبدني بطاعتك فانت حسبي ونعم الوكيل

### دعاء النهاية من المذاكرة

اللهم اني استودعتك علمي هذا امانت عندك على ان ترده إلي وقت حاجتي اليه .

### دعاء دخول كجنت الاختبار او الامتحان

اللهم اني توكلت عليك ، واسلمت أمري إليك ، لا ملجأ منك إلا إليك ربي ادخلني مدخل صدق واخرجني مخرج صدق واجعل لي من لدنك سلطاناً نصيراً .

### دعاء عند الإجابة عن الامتحان

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً ، وانت تجعل الحزن إن شئت سهلاً .  
اللهم رد لي ما استودعته امانت عندك

### دعاء عند التفكير أو التساؤل

لا إله إلا أنت سبحانك اني كنت من الظالمين يا حي يا قيوم برحمتك استغيث  
ربي يسر ولا تعسر .

### دعاء الانتهاء من الإمتحان

أحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله .

### دعاء أكفك

اللهم يا معلم إبراهيم علمني ، ويا مفلح سليمان فلهمني ،  
ويا مصير أيوب صبرني ، ويا مؤتي لقمان الحكمة آتني الحكمة وفصل الخطاب  
اللهم علمني ما ينفعني وانفعني بما علمتني .

### دعاء الفهم

سبحان الله ، وأحمد لله ولا إله إلا الله ، والله أكبر ولا حول ولا قوة إلا بالله  
العلي العظيم حسبي الله لا إله إلا هو عليه توكلت وهو رب العرش العظيم



# آخر كلامي

لست الأفضل ولكن لي

أسلوبى .. سأظل دائماً

أقبل رأي الناقد والمتهم ..

[www.bac-alg.com](http://www.bac-alg.com)

فالأول يصح مساري والثاني

يزيد من إصراري .....

لا تنسونا خالص دعائكم