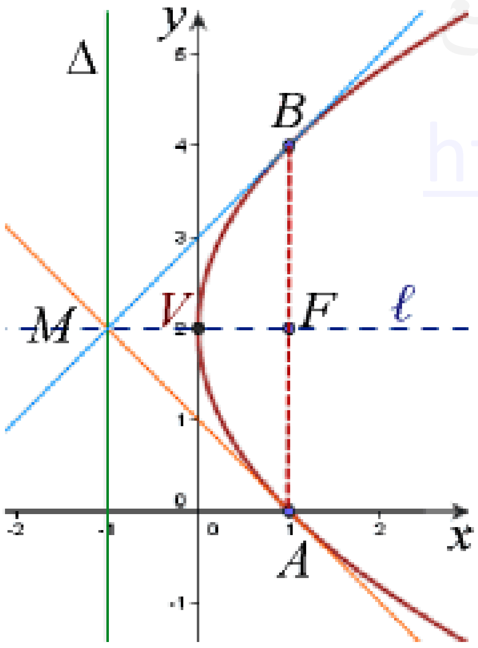
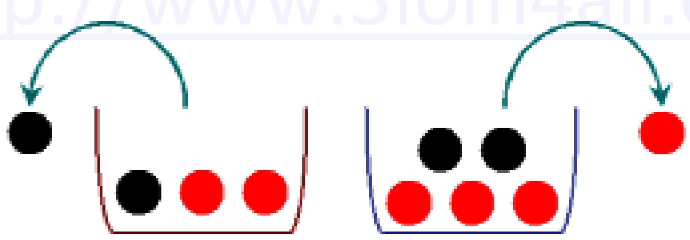
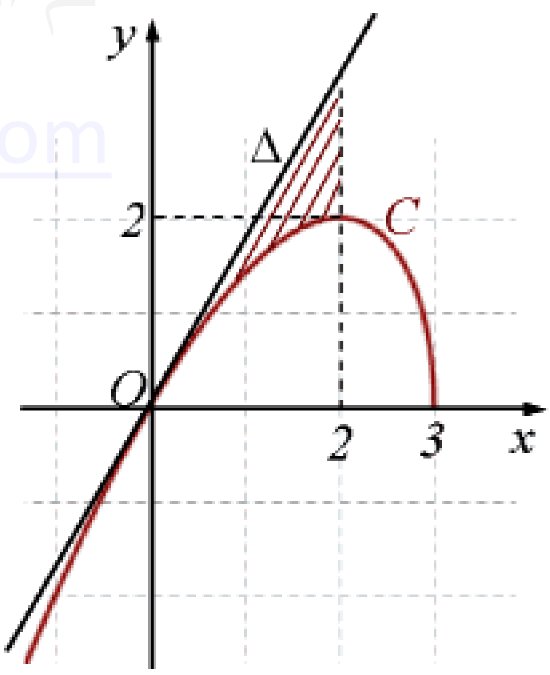
اختبارات رياضيات محلولة

عشرة نماذج

للثالث الثانوي العلمي







اعداد المدرس
0933387711
عبد الحميد السيد

النموذج الأول من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات — **المدرس : عبد الحميد السيد** — الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اعتماداً على تعريف الدالة المشتقة أثبت أن مشتقة الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق :

$f(x)=1-\frac{1}{x}$ هي الدالة : $f'(x)=\frac{1}{x^2}$.

ثانياً : حل التمارين الآتية : (60 للأول – 60 للثاني – 30 للثالث)

$1-a$) احسب التكامل : $I=\int x^r \cdot \ln x \, dx$ على المجال $]0,+\infty[$ حيث $r\in Q\setminus\{-1\}$.

b) احسب : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}$

2 – أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,3)$ الذي يعامد المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ حيث :

$$\mathcal{P}_1 : 2x+z-1=0 \quad \text{و} \quad \mathcal{P}_2 : x-y+2z+3=0$$

3 – لتكن النقاط A, B, C صور الأعداد المركبة $z_A=1-i\ , z_B=1+i\ , z_C=1+i\,e^{i\theta}$

في المستوي العقدي ، حيث $\theta\in\,]0,\pi[$. أثبت أن ABC مثلث قائم في C .

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 90 للثاني – 80 للثالث – 40 للرابع)

السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=x-1+\frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

1) أوجد كل مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو المحور $y'y$.

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

السؤال الثاني : أوجد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة $M\left(4,4\sqrt{2}\right)$ ومعادلتا مقاربيه

$$3y-4x+4=0 \quad \text{و} \quad 3y+4x-4=0$$

وعين ذروتيه ومحرقيه وارسمه مع مقاربيه ، ثم اكتب معادلة المماس له في النقطة M .

واوجد نقطة من القطع الزائد يكون فيها المماس موازياً للمماس في M .

السؤال الثالث : مغلف يحتوي 6 بطاقات متماثلة ومرقمة بالأعداد : $0 , 0 , 1 , 2 , 2 , 2$

نسحب من المغلف بطاقتين بالتتالي مع إعادة البطاقة المسحوبة :

1) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين يساوي 2 ، ما احتمال أن يكون رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين 1 ؟

2) نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X واكتب جدول توزيعه ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الرابع : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ -2x + 2y - 3z &= -6 \\ 3x + 6y + 4z &= 14 \end{aligned}$$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0 , +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو $y'y$ ، وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها .

3) استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلاً وحيداً في $]0 , +\infty[$ عندما $\lambda < 0$

4) احسب طول القوس من الخط C المحدد بالنقطتين $A(\ln 2 , -\ln 3) , B\left(\ln 4 , \ln \dfrac{3}{5}\right)$

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C . واستنتج من C الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعينة

بالعلاقة : $f_1(x) = \ln \dfrac{e^{x+1} - e}{e^x + 1}$

انتهت الأسئلة

(يمنع استخدام الجداول اللوغاريتمية والآلة الحاسبة)

النموذج الثاني من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات　　**المدرس : عبد الحميد السيد**　　الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اوجد معادلة القطع الذي إحداثيات أحد محرقيه (a,a) حيث $a \in R^*$ ، ومعادلة دليله المتعلق بهذا المحرق هي $x+y=a$ ، وتباعده المركزي $\sqrt{2}$.

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 40 للثاني – 60 للثالث)

1 – احسب ما يأتي : $2)\ \lim_{x \to +\infty}\left(\ln x - \sqrt{x}\right)$　　$1)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{e^{x}+e^{-x}-2}$

2 – ليكن المستقيمان L_1 و L_2 المعرفان كما يأتي :

$$L_2 : \frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{5} \quad \text{و} \quad L_1 : \begin{cases} x=2t \\ y=1-2t \\ z=2 \end{cases} ;t \in R$$

بين أن L_1 و L_2 متقاطعان بنقطة يطلب إيجادها . ثم احسب نسبة مثلثية للزاوية الحادة بينهما .

3 – اكتب العدد المركب $z=-8i$ بالشكل الأسي ، ثم أوجد جذوره التكعيبية واكتبها بالشكل الجبري

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (50 للأول – 90 للثاني – 50 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

2) أوجد على المجال $]0,+\infty[$ معادلة المنحني التكاملي للدالة f المار بالنقطة $A(1,1)$.

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $[-2,2]$ وفق : $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ، وبين أن للدالة f قيمة صغرى شاملة وقيمة كبرى شاملة .

2) أثبت أن الخط البياني C متناظر بالنسبة إلى مبدأ الاحداثيات ، ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$.

4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحدد بـ C والمحور $x'x$ حول $x'x$ دورة كاملة .

السؤال الثالث : أثبت أن المعادلة $4x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ تمثل معادلة قطع ناقص .

عين مركزه وذراه ومحرقيه واكتب معادلتي المماسين للقطع في طرفي قطره الصغير ثم ارسمه .

السؤال الرابع : صندوقان متماثلان فيهما بطاقات متماثلة :

الصندوق (I) يحتوي ثلاث بطاقات مرقمة بالأعداد $1 , 2 , 3$

الصندوق (II) يحتوي خمس بطاقات مرقمة بالأعداد $2 , 3 , 4 , 5 , 6$

1) نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه بطاقتان معاً ، فإذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين زوجي . احسب احتمال أن تكون البطاقتان قد سحبتا من الصندوق (I) .

2) نسحب عشوائياً بطاقتان من الصندوق (I) ، ونسحب عشوائياً بطاقة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة من الصندوقين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم نظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R وفق : $f(x) = (x-1)e^x$

1) أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أن مشتق الدالة f من المرتبة n حيث $n \in N^*$

يعطى بالعلاقة : $f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واوجد ما للخط C من مقاربات توازي $x'x$.

دل على القيمة الصغرى محلياً وبين فيما إذا كانت قيمة صغرى شاملة .

3) ادرس بحسب قيم $\lambda \in R$ قابلية المعادلة $f(x) = \lambda$ للحل .

4) أوجد نقطة من C التي من أجلها يكون $f''(x) = 0$ وارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C

واستنتج منه رسم الخط C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة : $f_1(x) = x e^{x+1}$

5) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحورين الإحداثيين .

انتهت الأسئلة

(يمنع استخدام الجداول اللوغاريتمية والآلة الحاسبة)

5

النموذج الثالث من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات   **المدرس : عبد الحميد السيد**   الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن f الدالة المعرفة على R وفق : $f(x) = \sin x$ بافتراض أن f اشتقاقية n مرة على R

أثبت بالاستقراء الرياضي أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n + x\right)$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 30 للثالث)

1 – ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 3$ مقارب للخط C .

ثم ادرس وضع الخط البياني C بالنسبة إلى المقارب Δ .

2) إذا كانت النقطة $M(x,y)$ تتحرك على الخط البياني C وكان معدل ابتعادها عن $y'y$ يساوي $4\,cm \cdot s^{-1}$ عندما $x = 4$. فأوجد معدل تغير ترتيبها عندئذٍ .

2 – اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(-4,3)$ وإحدى ذروتيه $(0,3)$ وأحد محرقيه $(-9,3)$

ثم أوجد ذروته الأخرى ومحرقه الآخر ومعادلتي مقاربيه وارسمه مع مقاربيه .

3 – إذا كان $z = e^{i\theta} \neq -1$ عدداً مركباً فبرهن صحة العلاقة : $\frac{2}{z+1} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2}$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (80 للأول – 40 للثاني – 80 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R \setminus \{1,3\}$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

1) إذا علمت أن الدالة f تكتب بالشكل : $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$ فأوجد الثابتين A و B .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C يوازي $x'x$ أو يوازي $y'y$

دل على القيمة الكبرى محلياً .

3) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الاحداثيين والمستقيم $x = -2$.

السؤال الثاني :

حل بطريقة غاوس جملة المعادلات : $3x + y = 1 \;,\; x + 2y = -3 \;,\; 4x + 3y = -2$

السؤال الثالث : يحوي صندوق 3 كرات سوداء و 2 كرة بيضاء :

1) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة . فإذا ظهرت كرتين بيضاوين على الأقل . فما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة مختلفة باللون .

2) نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً ونعرف المتغير العشوائي X الذي قيمته تساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة. عين قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

السؤال الرابع : لتكن النقاط : $A(3,0,3)$, $B(1,4,-3)$, $C(1,0,3)$, $D(1,0,-3)$

1) احسب $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}$ ، ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته .

2) احسب طول المتوسط المتعلق بالضلع $[DC]$ في المثلث BCD .

3) أثبت أن المتجه $\overrightarrow{AC}$ ناظم على المستوي BCD .

4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

لتكن مجموعة الدوال f المعرفة على $D \subseteq R$ وفق $f(x)=\ln(ax+b)$ والمطلوب :

أولاً : عين منها الدالة f التي خطها البياني C يمر من مبدأ الاحداثيات والمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب للخط البياني C عندما $x \xrightarrow{>} -1$.

ثانياً : من أجل $a=b=1$ نحصل على الدالة f : $f(x)=\ln(x+1)$ خطها البياني C

1) أوجد مجموعة تعريفها وبرهن باستخدام تعريف العدد المشتق أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

2) اوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستفد مما سبق في تنظيم جدول تغيرات الدالة f .

3) برهن أن الدالة f تقابل ، ثم عين f^{-1} تقابلها العكسي .

4) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C واستنتج رسم الخط البياني C^{-1} للدالة f^{-1} .

5) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمحور $y'y$ والمستقيم الذي معادلته $y=1$ والخط البياني C^{-1} للدالة f^{-1} حول المحور $x'x$ دورة كاملة .

انتهت الأسئلة

(يمنع استخدام الجداول اللوغاريتمية والآلة الحاسبة)

النموذج الرابع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات | المدرس : عبد الحميد السيد | الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اعتماداً على تعريف القطع المكافئ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $F(0,-3)$
ومعادلة دليله Δ هي $y=1$. ثم عين ذروته وجهة فتحته وارسمه .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 40 للثاني – 60 للثالث)

1 – أثبت أن $e^x \geq 1+x$ وذلك مهما كانت x من R . ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^x=+\infty$

2 – اكتب معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الذي يمر بالنقطة $A(2,0,-2)$ موازياً للمستوي $\mathcal{P}'$ الذي معادلته $2x-2y+z+1=0$ ثم احسب البعد بين المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$.

3 – a) أثبت أن : $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{36}+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}=2$

b) إذا كانت $M(x,y)$ صورة العدد المركب $z=x+iy$ أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة النقط M إذا كان : $|iz-1|=|z-1|$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (60 للأول – 70 للثاني – 50 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول : لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . ثم أثبت أن للدالة f قيمة كبرى شاملة .

2) أثبت أن : $\pi^e<e^\pi$

السؤال الثاني : لتكن f دالة معرفة على $]-\infty,3]$ وفق : $f(x)=x\sqrt{3-x}$ خطها البياني C :

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . ثم عين ما للدالة f من قيم كبرى وقيم صغرى محلياً

2) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في المبدأ وادرس وضع C بالنسبة لـ Δ ثم ارسم Δ والخط C

3) ارسم المماس Δ والخط C واحسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين Δ و C والمستقيم الذي معادلته $x=2$ دورة كاملة حول المحور $x'x$.

السؤال الثالث :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي تباعده المركزي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وأحد محرقيه يقع في المبدأ ومعادلة دليله Δ المتعلق بهذا المحرق هي $x+1=0$ ، عين مركزه وطولا قطريه .

السؤال الرابع :

يحوي صندوق 6 كرات متماثلة (1 حمراء و 2 بيضاء و 3 سوداء)

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون اعادة :

1) احسب احتمال ظهور الكرة الحمراء في السحبة الأولى .

2) إذا ظهرت كرة بيضاء على الأقل فما احتمال ظهور الكرة الحمراء بين الكرات الثلاثة .

3) نعطي للكرة السوداء القيمة (-1) وللكرة البيضاء القيمة (1) وللكرة الحمراء القيمة (n)

ونعرف المتغير العشوائي X الذي يدل على مجموع القيم الناتجة من الكرات الثلاثة .

اكتب قيم المتغير العشوائي X بدلالة (n) . ونظم جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب قيمة (n) كي تكون اللعبة عادلة .

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

لتكن الدالة f المعرفة على R^* وفق : $f(x)=2x+1+\frac{1}{x^2}$ خطها البياني C :

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب للخط C عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . ثم استنتج كل مقارب لـ C يوازي المحور $y'y$.

دل على القيمة الصغرى محلياً للدالة f.

3) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة تقاطعه مع المحور $x'x$ ثم ارسم كل مقارب وجدته و C

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$, $x=2$.

5) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط λ عدد حلول المعادلة $2x^3+(1-\lambda)x^2+1=0$.

انتهت الأسئلة

(يمنع استخدام الجداول اللوغاريتمية والآلة الحاسبة)

النموذج الخامس من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات | ***المدرس : عبد الحميد السيد*** | الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن الدالة f المعرفة على $D = [0, 2\pi]$ وفق $f(x) = \sin x + \cos x + 1$

أثبت أن للدالة قيمة كبرى شاملة وقيمة صغرى شاملة .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

1 – باستخدام مبرهنة الاحاطة أثبت أن :

$$a) \lim_{x \to -\infty} e^{x - \sin x} = 0 \quad ، \quad b) \lim_{x \to +\infty} e^{x - \sin x} = +\infty$$

2 – لتكن النقاط $A(2, 3, -1)$ و $B(3, 5, -3)$ و $C(1, 2, \alpha)$

1) عين قيمة α من R ليكون المثلث ABC قائماً في B .

2) بفرض $\alpha = -1$ أوجد $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$ واكتب معادلة المستوي المار بالنقاط A, B, C

واحسب مساحة المثلث ABC وقيمة $\sin B$.

3 – باستعمال طريقة غاوس أثبت أن جملة المعادلات الآتية مستحيلة الحل :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases}$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (80 للأول – 90 للثاني – 60 للثالث – 50 للرابع)

السؤال الأول :

ليكن C_f الخط البياني للدالة f المعرفة على $R \setminus \{-1\}$ وفق : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

وليكن C_g الخط البياني للدالة g المعرفة على $R \setminus \{1\}$ وفق : $g(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب لكل من الخطين C_f و C_g عند كل من

$-\infty$ و $+\infty$. ثم ادرس الوضع النسبي للخطين C_f و C_g .

2) احسب مساحة السطح المحدد بالخطين C_f و C_g والمستقيمين : $x = -3$, $x = -5$.

السؤال الثاني : ليكن القطع الزائد الذي معادلته : $4x^2 - y^2 - 2y = 5$

1) عين مركزه وذروتيه ومحرقيه واحسب تباعده المركزي واكتب معادلتي مقاربيه ثم ارسمه .

2) اكتب معادلة كل مماس للقطع الزائد ميله يساوي ($2\sqrt{2}$) .

السؤال الثالث : صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة .

الصندوق (I) يحتوي (3) كرات مرقمة بالأرقام $1 , 2 , 3$

الصندوق (II) يحتوي (4) كرات مرقمة بالأرقام $2 , 3 , 4 , 5$

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ثم نسحب كرة من الصندوق (II) والمطلوب :

1) نظم جدولاً لفضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

2) بفرض الحدث A : إحدى الكرتين على الأقل تحمل رقم 3 .

والحدث B : مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5 . أثبت أن الحدثان A , B مستقلان احتمالياً

3) إذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوقين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

السؤال الرابع :

انطلاقاً من دستور أويلر اكتب $\cos^4 \theta$ بشكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ .

ثم أوجد $\int \cos^4 x \, dx$ اعتماداً على ما تجده .

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D = R \setminus \{0 , 2\}$ وفق : $f(x) = \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ أو المحور $x'x$.

2) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة تقاطع C مع المحور $x'x$.

3) ارسم كل مقارب وجدته للخط C وارسم المماس Δ ثم ارسم C .

4) استنتج من C الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعينة وفق : $f_1(x) = 2\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$

انتهت الأسئلة

النموذج السادس من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات — **المدرس : عبد الحميد السيد** — الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

إذا كانت $\{(x_k , y_k) : 1 \le k \le n\}$ عينة مكونة من n قراءة لثنائيات من المقادير الاحصائية

وكان : $\overline{y^2} = 20$, $\overline{x^2} = 4000$, $\overline{x \cdot y} = 260$, $\overline{y} = 4$, $\overline{x} = 60$

فأوجد مع التسمية كل من المقادير الآتية : σ_x ، σ_y ، σ_{xy} ، r_{xy}

ثم بين مع التعليل نوع الارتباط ، واكتب معادلة مستقيم الانحدار لهذه العينة .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

1 – a) علل سبب عدم وجود نهاية للدالة $f(x) = \sqrt{2x - 1 - x^2}$ عند $x = 1$.

b) فرق الكسر $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x}$ إلى مجموع كسور جزئية واحسب $\int f(x) \cdot dx$ على $]-\infty, 0[$

2 – صندوقان متماثلان أحدهما I يحوي كرتين حمراوين وثلاث كرات بيضاء ، والآخر II يحوي n كرة حمراء وكرة واحدة بيضاء . نختار عشوائياً صندوقاً ، ثم نسحب منه كرة واحدة فقط .

ليكن A حدث الحصول على كرة بيضاء ، وليكن B حدث اختيار الصندوق II .

احسب n إذا علمت أن $P_A(B) = \dfrac{1}{4}$.

3 – عين قيمة الوسيط α لكي يتعامد المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ حيث : $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : \alpha x + y - z - 2 = 0 \\ \mathcal{P}_2 : x + \alpha y - 2z + \alpha = 0 \end{cases}$

واحسب بعد النقطة $A(1,2,1)$ عن فصلهما المشترك .

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 70 للثاني – 90 للثالث – 50 للرابع)

السؤال الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty, 1]$ وفق : $f(x) = x + 2\sqrt{1 - x}$ خطها البياني C :

1) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 1$ من اليسار .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، ثم دل على كل قيمة كبرى أو صغرى محلياً .

السؤال الثاني :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R^* وفق : $f(x)=ax+\frac{b}{x^3}$ والمطلوب :

1) أوجد قيمة كل من a , b إذا علمت أن للدالة قيمة صغرى محلياً هي $f(1)=4$

2) من أجل $a=-1 , b=1$ تصبح الدالة $f(x)=\frac{1}{x^3}-x$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x$ مقارب لـ C وادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

السؤال الثالث :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $M\left(2,\sqrt{6}\right)$ وتقع ذروتان من ذراه عند النقطتين

$(-1,0),(3,0)$ ثم عين محرقيه F و F' وارسمه واكتب معادلة المماس للقطع في النقطة M .

أثبت أن القطعة المستقيمة $[FF']$ ترى من أحد طرفي القطر الصغير للقطع ضمن زاوية قائمة .

السؤال الرابع :

أوجد عدداً $\omega\in C$ يحقق المعادلة $\omega^2=-5-12i$.

ثم حل بطريقة الاتمام إلى مربع كامل المعادلة الآتية : $z^2-6iz-4+12i=0$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

لتكن f الدالة المعرفة على R وفق : $f(x)=\frac{4}{1+e^x}$ خطها البياني C :

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها .

2) استنتج من جدول التغيرات أنه إذا كان $\lambda\in R$ فإن المعادلة $\lambda=(4-\lambda)e^{-x}$ لها جذر وحيد

عندما $\lambda\in]0,4[$ وغير قابلة للحل عندما $\lambda\in]-\infty,0]\cup[4,+\infty[$.

3) أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة وبين وضع C بالنسبة إلى كل مقارب له .

4) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x+2$ مماس للخط C في النقطة $A(0,2)$.

5) ارسم كل مقارب وجدته وارسم Δ ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=-\ln 2 , x=\ln 2$

انتهت الأسئلة

النموذج السابع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات   **المدرس : عبد الحميد السيد**   الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اعتماداً على التعريف المشترك للقطوع ، بين أن مجموعة النقاط $M(x,y)$ في المستوي التي نسبة بعدها عن النقطة $F(0,0)$ إلى بعدها عن المستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ تساوي $\sqrt{2}$ هي نقاط قطع زائد . ماذا تمثل النقطة F بالنسبة للقطع ؟ وماذا يمثل المستقيم Δ بالنسبة للقطع ؟ أوجد معادلة هذا القطع واكتبها بالصيغة القياسية .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (40 للأول – 40 للثاني – 70 للثالث)

1 – اسطوانة دورانية قائمة معدنية يزداد نصف قطر قاعدتها بمعدل $0.002\ cm\backslash s$ ويزداد ارتفاعها بمعدل $0.008\ cm\backslash s$. أوجد معدل زيادة حجم الاسطوانة عندما يكون ارتفاعها $h=40\ cm$ ونصف قطر قاعدتها $r=5\ cm$.

2 – لتكن النقطة $A(3,-1,1)$ ، والمستوي المعطى بالمعادلة $\mathcal{P}: x-2y+z=0$ بين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي $\mathcal{P}$ هو النقطة $A'(2,1,0)$.

3 – أثبت بطريقة غاوس أن لجملة المعادلات الآتية حلاً وحيداً وأوجده :

$$2x=y+4$$
$$2z=x+5$$
$$2y=z-7$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (80 للأول – 50 للثاني – 70 للثالث – 80 للرابع)

السؤال الأول : احسب ما يأتي :

$$a)\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{2x+4}-4}{x-6}\ ,\quad b)\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{3-\sin\frac{1}{x}}\ ,\quad c)\ I=\int e^{\sqrt{x}}\,dx\ ;\ x\in\,]0,+\infty[$$

السؤال الثاني :

أوجد معادلة كل قطع مكافئ معادلة محور تناظره $y=1$ ومعادلة دليله $x=-1$ وطول وتره المحرقي الأساسي يساوي (4) .

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R\setminus\{-2,0\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+2x}$:

1) أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x-2$ مقارب للخط C ، ثم ادرس وضع الخط C بالنسبة إلى Δ .

2) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=-3\ ,\ x=-6$.

السؤال الرابع :

إذا كان A و B حدثين مستقلين احتمالياً من الفضاء الاحتمالي الموافق لتجربة عشوائية ، وكان :

$P(A'\cap B')=\dfrac{3}{15}\ ,\ P(A\setminus B)=\dfrac{7}{15}$ فاحسب : $P(A)\ ,\ P(B)\ ,P_B(B\setminus A)$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(e\cdot x)$ خطها البياني C

ولتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=\dfrac{\ln(e\cdot x)}{e^x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج إشارتها . وارسم خطها البياني C .

2) ادرس تغيرات الدالة g ونظم جدولاً بها ، واستنتج $g(]0,+\infty[)$.

3) برهن أن $F(x)=(1-x)\cdot\ln(x)$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$

ثم احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $x'x$ والمستقيم $x=e$

انتهت الأسئلة

(يمنع استخدام الجداول اللوغاريتمية والآلة الحاسبة)

النموذج الثامن من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات — **المدرس : عبد الحميد السيد** — الدرجة : ستمائة

<u>أولاً : أجب عن السؤال الآتي</u> : (60 درجة)

لتكن $M(u,v)$ نقطة من القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ومختلفة عن ذروتيه

أثبت أن معادلة المماس للقطع الزائد في M هي : $\frac{ux}{a^2}-\frac{vy}{b^2}=1$

<u>ثانياً : حل التمارين الآتية</u> : (60 للأول – 40 للثاني – 60 للثالث)

$1-a$) ابحث عن نهاية الدالة : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ عندما تسعى x إلى الصفر .

b) احسب العدد : $I=\int_e^1 (2x-\ln x)dx$

2 – اكتب معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1,-2)$ ، وطول قطره الكبير $4\sqrt{2}$ ، والمسافة بين محرقيه 4 ومحوره المحرقي يوازي محور التراتيب . ثم احسب تباعده المركزي .

3 – يحتوي صندوق على أربعة بطاقات تحمل الأرقام $1,2,3,n$ حيث $n\in N$

نسحب من الصندوق بطاقة واحدة عشوائياً .

فإذا كان احتمال سحب كل بطاقة حسب رقمها يساوي P_1,P_2,P_3,P_n .

بفرض أن P_1,P_2,P_3,P_n بهذا الترتيب أربعة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{8}$

1) احسب كلاً من P_1,P_2,P_3,P_n .

2) ليكن X المتغير العشوائي الدال على رقم البطاقة المسحوبة ، احسب n إذا علمت أن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 4 .

<u>ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية</u> : (40 للأول – 80 للثاني – 50 للثالث – 90 للرابع)

<u>السؤال الأول</u> :

لتكن الدالة $f:R\to R: f(x)=|x+1|-|1-x|$ اكتب الدالة f على هيئة دالة معرفة على مجالات ثم ارسم خطها البياني وبين أن للدالة f قيمة صغرى شاملة و قيمة كبرى شاملة .

السؤال الثاني :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R وفق : $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$

1) أثبت أن الدالة f زوجية واستنتج الصفة التناظرية للخط C .

2) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=-1 , x=1$ دورة كاملة حول $x'x$.

3) احسب طول القوس من الخط C المحدد بالنقطتين $A(0,f(0)), B(1,f(1))$.

السؤال الثالث :

ليكن المتجهين $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{v}=4\vec{j}-3\vec{k}$ أوجد العبارة التحليلية للمتجه $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ واحسب نسبة مثلثية للزاوية بين المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ثم أوجد معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الذي يمر بالنقطة $A(1,2,0)$ موازياً كلا المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

السؤال الرابع : ليكن العددان المركبان $z_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}i \ , \ z_2=3+\sqrt{3}i$

1) اكتب كلاً من z_1 , z_2 بالشكل الأسي .

2) اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي العدد $z=\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\sin\frac{\pi}{12} , \cos\frac{\pi}{12}$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$

1) أثبت أن f تكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$: a , b , c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2) أوجد كل مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ ثم ادرس وضع C بالنسبة لكل مقارب وجدته .

3) أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x-2$ مقارب للخط C ، ثم ادرس وضع الخط C بالنسبة إلى Δ .

4) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، وبين ما للدالة f من قيم كبرى أو صغرى محلياً .
ثم أوجد $f(R\setminus\{-1\})$.

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=8$ و $x=2$

انتهت الأسئلة

النموذج التاسع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات المدرس : عبد الحميد السيد الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

عين قيم A و B بحيث تكون الدالة f المعرفة فيما يأتي مستمرة على R :

$$f(x)=\begin{cases} A\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|} & : x<1 \\ -1 & : x=1 \\ B\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2} & : x>1 \end{cases}$$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (60 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

1 – a) احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{1-2x}$

b) احسب التكامل : $I=\int\dfrac{2}{\sin 2x}dx$ على المجال $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

2 – ليكن المستقيمان L_1 و L_2 اللذين معادلتاهما :

$$L_1:\begin{cases} x=2 \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} ;\lambda\in R \quad \text{و} \quad L_2:\begin{cases} x=2+s \\ y=1-s \\ z=2s \end{cases} ;s\in R$$

أثبت أن المستقيمان L_1 و L_2 متخالفان . وأوجد نقطة تقاطع المستقيم L_2 مع المستوي xoz .

3 – إنطلاقاً من دستور دوموافر أوجد كلاً من $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 40 للثاني – 70 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول :

مخروط دوراني قائم طول قطر قاعدته $8\,cm$ ، مركزها o ، وطول ارتفاع المخروط $6\,cm$

نقطعه بمستوٍ متحول يوازي مستوي القاعدة ويبعد عنها مسافة $x\,cm$.

1) احسب بدلالة x حجم المخروط الذي رأسه o وقاعدته المقطع السابق .

2) أوجد قيمة x ليكون حجم هذا المخروط أكبر ما يمكن .

3) إذا تغير x بمعدل $0.9\,cm\backslash s$ فأوجد معدل تغير الحجم السابق عندما تصبح $x=1cm$

السؤال الثاني :

اكتب جملة ثلاثة معادلات بمجهولين (x , y) مصفوفتها الموسعة : $H = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$

ثم أوجد مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة H . وبين فيما إذا كان لجملة المعادلات حلول .

السؤال الثالث : يحوي مغلف سبع بطاقات متماثلة ومرقمة بالأعداد : $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$

1) نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات معاً فإذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي ، ما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 بينها .

2) نسحب عشوائياً من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة ونعرف متغيراً عشوائياً X الذي يدل على الرقم الأكبر بين رقمي البطاقتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X وجدول توزيعه ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الرابع : أوجد معادلة القطع الزائد في كل حالة من الحالتين الآتيتين :

1) مركزه $O'(0,1)$ ويمر بالنقطتين $M_1\left(4\sqrt{2},-2\right)$ و $M_2\left(\sqrt{5},-\frac{1}{2}\right)$

2) مركزه يقع على محور الفواصل ومعادلة أحد مقاربيه $y = -2x + 4$ ويمر بالنقطة $\left(-\frac{1}{2},3\right)$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

ليكن C_1 الخط البياني للدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \ln(x+1)$

وليكن C_2 الخط البياني للدالة g المعرفة على $R\setminus\{-1\}$ وفق : $g(x) = \frac{x}{x+1}$

1) أثبت أنه مهما كانت x من $]-1,+\infty[$ فإن : $f(x) \leq x$

2) أثبت أن C_1 و C_2 متماسان في المبدأ $O(0,0)$ ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما في O .

3) ادرس الوضع النسبي للخطين C_1 و C_2 على المجال $]0,+\infty[$.

4) ادرس تغيرات الدالة g ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C_2 يوازي $x'x$ أو $y'y$.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات للخط C_2 وارسم C_2 . ثم احسب حجم المجسم المتولد من دوران المنطقة المحددة بالخط C_2 والمحور $x'x$ والمستقيم $x = 2$ دورة كاملة حول المحور $x'x$.

انتهت الأسئلة

19

النموذج العاشر من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات | المدرس : عبد الحميد السيد | الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن الدالة f المعرفة على R وفق : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}$

1) تحقق أن $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$

2) احسب كل من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{f(x)}{x-2}$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{f(x)}{x-2}$. هل f اشتقاقية عند 2 ؟ علل .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

1 – a) احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{1-x}$

b) احسب التكامل : $I=\int x(1-x)^n dx \; ; n \in N^*$

2 – أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم L الذي يتعين بالمعادلتين : $\begin{cases} x-2y+4z-1=0 \\ 3x+y-2z+4=0 \end{cases}$

ثم ادرس الوضع النسبي للمستقيم L والمستقيم المار بالنقطتين $A(1,2,-1)$ و $B(1,0,-2)$

3 – بفرض α عدد حقيقي ، اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية بالشكل الأسي :

$1)z=-\sin\alpha+i\cos\alpha \quad , \quad 2)z=1+e^{2\alpha i} \; ; \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$3)z=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \; ; \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 60 للثاني – 90 للثالث – 50 للرابع)

السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R وفق : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط C ، وادرس وضع C بالنسبة لـ Δ .

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .

3) أوجد قيمة تقريبية لميل المماس للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها (0.2) .

السؤال الثاني :

أثبت بطريقة غاوس أن لجملة المعادلات الآتية عدداً غير منتهٍ من الحلول ثم أوجد تلك الحلول

$2x-2y+3z=4 \quad , \quad x+y+z=5 \quad , \quad 3x-y+4z=9$

السؤال الثالث : ليكن القطع المكافئ ($\mathcal{P}$) الذي معادلته : $y^2 = 4(x+y-1)$

1) اكتب معادلة $\mathcal{P}$ بالصيغة القياسية ثم عين ذروته وبين أنه يمس محور التراتيب بذروته .

2) اكتب معادلة محور تناظر القطع وعين جهة فتحة القطع ومحرقه ومعادلة دليله .

3) أوجد إحداثيي النقطتين A و B طرفي الوتر المحرقي الأساسي للقطع $\mathcal{P}$ ، برهن أن المماسين للقطع في تلك النقطتين متعامدين واكتب معادلتيهما وبين أنهما يتقاطعان بنقطة هي نقطة تقاطع محور تناظر القطع مع دليله . ثم ارسم القطع ومماسيه ودليله .

السؤال الرابع :

ثلاثة صناديق متشابهة يحتوي الأول على 10 كرات ، 6 منها بيضاء والباقي من اللون الأسود ويحتوي الثاني على 5 كرات ، 4 منها بيضاء والباقي من اللون الأسود ، ويحتوي الثالث على 5 كرات اثنتان منها بيضاء والباقي من اللون الأسود .

اختير صندوق من الصناديق الثلاثة بشكل عشوائي وسحبت منه كرة واحدة :

1) احسب احتمال سحب كرة سوداء .

2) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول .

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R \setminus \{-2,2\}$ وفق : $f(x) = \dfrac{x^2-2x-4}{4-x^2}$

1) إذا علمت أن f تكتب بالشكل $f(x) = A + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{D}{x+2}$ فاحسب A و B و D .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، واستنتج كل مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ أو يوازي $x'x$. ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع مقاربه الموازي للمحور $x'x$.

3) اكتب معادلة المماس d للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

4) اوجد فواصل نقط تقاطع الخط C مع المحور $x'x$.

5) ارسم كل مقارب وجدته وارسم المماس d ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين : $x=1$, $x=-1$.

انتهت الأسئلة

حلول أسئلة النموذج الأول من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات　　　　الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اعتماداً على تعريف الدالة المشتقة أثبت أن مشتقة الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق :

$f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ هي الدالة : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

لتكن x_0 من $]0,+\infty[$

عندئذ أياً كانت x من $]0,+\infty[\setminus\{x_0\}$ فإن :

$$\Delta_{f,x_0}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}\right)=\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}=\frac{1}{x\cdot x_0}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta_{f,x_0}(x)=\dfrac{1}{x_0^2}$

وبالتالي الدالة f اشتقاقية عند x_0 و يكون : $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0^2}$

وبما أن x_0 عدد كيفي من $]0,+\infty[$

نستنتج أن الدلة المشتقة f' معرفة على $]0,+\infty[$

أي مهما كانت x من $]0,+\infty[$ كان : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (60 للأول – 60 للثاني – 30 للثالث)

$a-1$) احسب التكامل : $I=\int x^r\cdot\ln x\,dx$ على المجال $]0,+\infty[$ حيث $r\in Q\setminus\{-1\}$.

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة :

$u(x)=\ln x$	$v'(x)=x^r$
$u'(x)=\dfrac{1}{x}$	$v(x)=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$

$$I = \ln(x)\cdot\frac{x^{r+1}}{r+1} - \int \frac{x^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln(x)\cdot\frac{x^{r+1}}{r+1} - \int\frac{x^{r}}{r+1}dx$$

$$I = \frac{x^{r+1}}{r+1}\cdot\ln(x) - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + c$$

---

b) احسب : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}$

الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}$ معرفة في جوار محذوف لـ -1 ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\ ;x\neq -1 \Rightarrow f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{-1-1}{1+1+1}=-\frac{2}{3}$$

---

2 – أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,3)$ الذي يعامد المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ حيث :

$$\mathcal{P}_2 : x-y+2z+3=0 \quad \text{و} \quad \mathcal{P}_1 : 2x+z-1=0$$

الحل : المتجه $\vec{n}_1(2,0,1)$ ناظم على $\mathcal{P}_1$

المتجه $\vec{n}_2(1,-1,2)$ ناظم على $\mathcal{P}_2$

- <u>طريقة أولى</u> :

إن : $\vec{n}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ ناظم على المستوي المطلوب $\mathcal{P}$.

$$\vec{n}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي $\mathcal{P}$:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow 1(x-2)-3(y-1)-2(z-3)=0$$

ومنه معادلة المستوي المطلوب : $x-3y-2z+7=0$

- طريقة ثانية :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$1(x-2)-3(y-1)-2(z-3)=0$$

ومنه معادلة المستوي المطلوب : $x-3y-2z+7=0$

3 – لتكن النقاط A, B, C صور الأعداد المركبة $z_A = 1-i\ ,\ z_B = 1+i\ ,\ z_C = 1+i\,e^{i\theta}$

في المستوي العقدي ، حيث $\theta \in]0,\pi[$. أثبت أن ABC مثلث قائم في C .

$$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{i\,e^{i\theta} - i}{i\,e^{i\theta} + i} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

الناتج عدد تخيلي بحت غير صفري وبالتالي ABC مثلث قائم في C.

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 90 للثاني – 80 للثالث – 40 للرابع)

السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D = [0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - 1 + \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

1) أوجد كل مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو المحور $y'y$.

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

1) الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[0,1[\,,\,]1,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط C يوازي $y'y$

وفي جوار $+\infty$ حيث $x \neq 0$: $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1-0+0) = +\infty$ فلا يوجد مقارب للخط C يوازي $x'x$.

2) دالة الفرق : $f(x) - y_\Delta = x - 1 + \frac{\sqrt{x}}{x-1} - x + 1 = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

وفي جوار $+\infty$ حيث $x \neq 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 0$$

نستنتج أن $\Delta : y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

في المجال $]0,1[$ يكون : $\frac{\sqrt{x}}{x-1} < 0$ أي $f(x) - y_\Delta < 0$ والخط C يقع تحت Δ .

في المجال $]1,+\infty[$ يكون : $\frac{\sqrt{x}}{x-1} > 0$ أي $f(x) - y_\Delta > 0$ والخط C يقع فوق Δ .

السؤال الثاني : أوجد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة $M(4, 4\sqrt{2})$ ومعادلتا مقاربيه

$$3y + 4x - 4 = 0 \quad \text{و} \quad 3y - 4x + 4 = 0$$

وعين ذروتيه ومحرقيه وارسمه مع مقاربيه ، ثم اكتب معادلة المماس له في النقطة M .

واوجد نقطة من القطع الزائد يكون فيها المماس موازياً للمماس في M .

الحل : مركز القطع هو نقطة تقاطع المقاربين

بجمع المعادلتين نجد : $y_0 = 0$

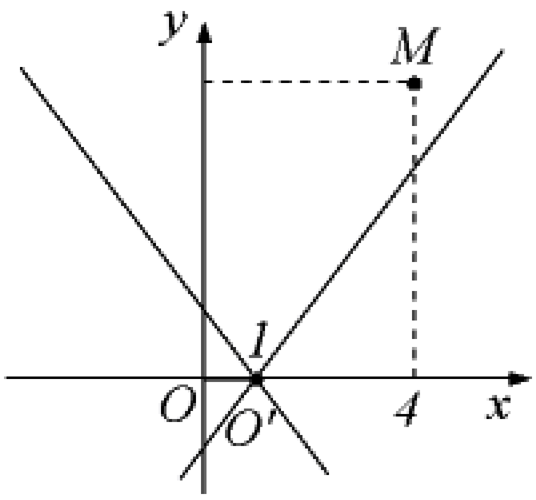
نعوض في احداهما فنجد $x_0 = 1$

أي المركز $O'(1,0)$

من ميل المقارب الأول نجد : $\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a$

نأخذ إحدى معادلتي القطع الزائد ونعوض النقطة ونحسب a أو b فإذا نتجت معادلة متناقضة نأخذ المعادلة الأخرى ونعيد الحساب ، ويمكننا اتباع طرائق أخرى كما يأتي :

- طريقة أولى : نرسم المقاربين وحسب وضع النقطة M بالنسبة للمقاربين نحدد المحور المحرقي



حسب التمثيل البياني نستنتج أن المحور المحرقي يوازي $y'y$

معادلة القطع من الصيغة : $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$

نعوض b بدلالة a وإحداثيات المركز والنقطة M :

$$\frac{9(4\sqrt{2})^2}{16a^2}-\frac{(4-1)^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}=1$$

ومنه $a=3$ وبالتالي $b=4$ إذن معادلة القطع : $\frac{y^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$

- طريقة ثانية :

معادلة القطع في حالتين : $\frac{b^2}{a^2}\cdot(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=\pm b^2$

وباعتبار : $\frac{b^2}{a^2}=m^2$ حيث m ميل المقارب ، وبفرض : $\pm b^2=h\neq 0$

تصبح المعادلة : $m^2(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=h$

معادلة القطع في حالتنا : $m^2(x-1)^2-y^2=h$ حيث $h\neq 0$ و m ميل المقارب

لدينا : $m=\frac{4}{3}$ والنقطة $M(4,4\sqrt{2})$ من القطع

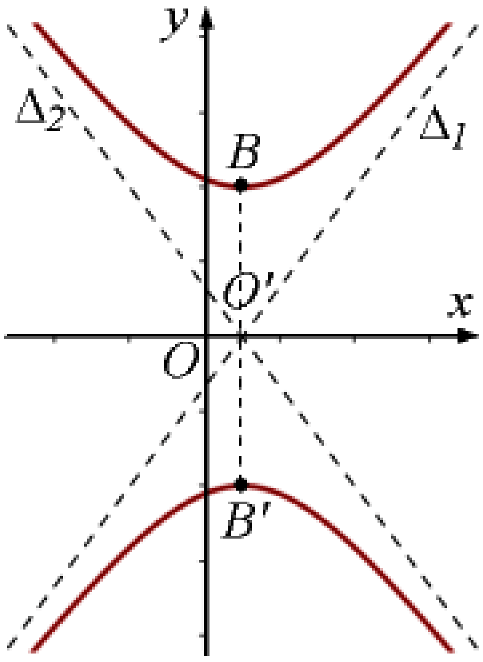
نعوض : $\left(\frac{4}{3}\right)^2(4-1)^2-(4\sqrt{2}-0)^2=h$ ومنه : $h=-16$

إذن : $\frac{16}{9}(x-1)^2-y^2=-16$

ومنه معادلة القطع : $\frac{y^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$

ذروتيه : $B(x_0,y_0+b)\Rightarrow B(1,4)\ ,\ B'(x_0,y_0-b)\Rightarrow B'(1,-4)$

لدينا : $c^2=a^2+b^2=9+16=25\Rightarrow c=5$



محرقيه : $F(x_0, y_0 + c) \Rightarrow F(1,5)$

$F'(x_0, y_0 - c) \Rightarrow F'(1,-5)$

نشتق معادلة القطع بالنسبة إلى x باعتبار $y = f(x)$

$$\frac{2y \cdot y'}{16} - \frac{2(x-1)}{9} = 0 \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}\,m}{16} - \frac{3}{9} = 0 \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

معادلة المماس : $y - 4\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(x-4)$

ومنه : $2\sqrt{2}x - 3y + 4\sqrt{2} = 0$

بفرض نقطة التماس الجديدة $M'(x_2, y_2)$ وبما أن القطع متناظر بالنسبة إلى مركزه فإن :

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow 0 = \frac{4\sqrt{2} + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = -4\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M'(-2, -4\sqrt{2})$$

ملاحظة : يمكن الاعتماد على نظير نقطة بالنسبة إلى نقطة : $M'(2x_0 - x_1, 2y_0 - y_1)$

السؤال الثالث : مغلف يحتوي 6 بطاقات متماثلة ومرقمة بالأعداد : $0, 0, 1, 2, 2, 2$

نسحب من المغلف بطاقتين بالتتالي مع إعادة البطاقة المسحوبة :

1) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين يساوي 2 ، ما احتمال أن يكون رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين 1 ؟

2) نعرف متغيراً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X واكتب جدول توزيعه ثم احسب توقعه الرياضي .

الامكانات لسحب بطاقتين بالتتالي مع إعادة : $\{(0\ 0), (0\ 1), (0\ 2), (1\ 1), (1\ 2), (2\ 2)\}$

1) الحدث الذي وقع A مجموع رقمي البطاقتين يساوي 2 . $A = \{(0\ 2), (1\ 1)\}$

الحدث B إحدى البطاقتين تحمل الرقم 1 . ومنه $A \cap B = \{(1\ 1)\}$

$$P(A) = 2\left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{6}\right) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{12}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{36}\times\frac{36}{13}\Rightarrow P_A(B)=\frac{1}{13}$$

2) مجموعة قيم المتغير العشوائي : $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$

$$f(0)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}\ ,\ f(1)=2\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{36}\ ,\ f(2)=\frac{13}{36}$$

$$f(3)=2\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}\right)=\frac{6}{36}\ ,\ f(4)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$$

جدول القانون الاحتمالي :

r_k	0	1	2	3	4
$f(r_k)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$

التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{5} r_k\cdot f(r_k)=\frac{1}{36}(0+4+26+18+36)=\frac{84}{36}\Rightarrow E(X)=\frac{7}{3}$$

السؤال الرابع : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات الآتية :

$$x+2y+z=5$$
$$-2x+2y-3z=-6$$
$$3x+6y+4z=14$$

الحل : نكتب المصفوفة الموسعة H ونجري عليها تحويلات سطرية :

$$H=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 4 & 14 \end{array}\right)\xrightarrow[R_3-3R_1\longrightarrow R_3]{R_2+2R_1\longrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

تؤول الجملة إلى المعادلات :

$$x+2y+z=5 \quad \ldots(1)$$
$$6y-z=4 \quad \ldots(2)$$
$$z=-1 \quad \ldots(3)$$

نعوض (3) في (2) فنجد : $y=\frac{1}{2}$ ، نعوض في (1) فنجد : $x=5$

وللجملة حل وحيد هو : $\left(5,\frac{1}{2},-1\right)$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعلاقة : $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو $y'y$ ، وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها .

3) استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلاً وحيداً في $]0,+\infty[$ عندما $\lambda<0$

4) احسب طول القوس من الخط C المحدد بالنقطتين $A(\ln 2,-\ln 3)\,,\,B\left(\ln 4,\ln\frac{3}{5}\right)$

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C . واستنتج من C الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعينة بالعلاقة

$$f_1(x)=\ln\frac{e^{x+1}-e}{e^x+1}$$

1) الدالة f مستمرة على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للخط C منطبق على $y'y$

و C يقع إلى يمين هذا المقارب عندما x تسعى إلى 0 من اليمين .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln 1=0$$

فالمستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للخط C منطبق على $x'x$ عندما تكون x بجوار $+\infty$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$

على المجال $]0,+\infty[$ يكون : $\frac{e^x-1}{e^x+1}<1$

إذن : $\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}<0$

أي : $f(x)-y<0$ فالخط C يقع تحت مقاربه . (تحت محور الفواصل)

2) الدالة f مستمرة و اشتقاقية على المجال $]0,+\infty[$

المشتقة : $$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

أي : $$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

ومنه : $$f'(x)=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}>0$$

حيث $e^{2x}-1>0$ في $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0

3) الدالة مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0,+\infty[$ و $f(]0,+\infty[)=]-\infty,0[$ ومنه f تقابل .

وبالتالي أياً كان $\lambda\in]-\infty,0[$ فإنه يوجد $x\in]0,+\infty[$

بحيث يكون للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلاً وحيداً بالنسبة إلى x .

4) لدينا : $$f'(x)=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}\Rightarrow[f'(x)]^2=\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

ومنه : $$1+[f'(x)]^2=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2$$

إذن : $\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ (ضربنا البسط والمقام بـ $e^{-x}\neq0$)

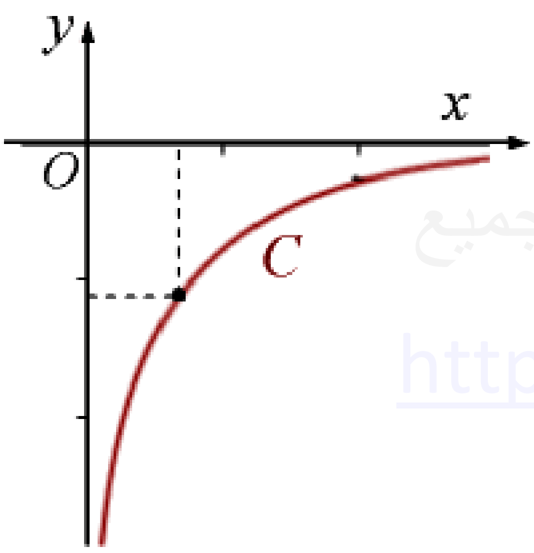
$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$$

$$x\in[\ln 2,\ln 4]\Rightarrow e^x-e^{-x}>0 : L=\left[\ln\left(e^x-e^{-x}\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$L=\ln\left(4-\frac{1}{4}\right)-\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow L=\ln\frac{5}{2}$$

يمكن تفريق الكسر بشكل آخر : $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\frac{2e^{2x}-e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-1$

5) رسم الخط البياني : لدينا $A(\ln 2,-\ln 3),\ B\left(\ln 4,\ln\frac{3}{5}\right)$ نقط مساعدة للرسم



لدينا : $f_1(x)=\ln\frac{e^{x+1}-e}{e^x+1}=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot e\right)$

أي : $f_1(x)=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}+\ln e$

أخيراً نجد : $f_1(x)=f(x)+1$

إذن : C_1 ينتج عن C بانسحاب متجهه $\vec{v}=\vec{j}$ (أو متجهه : $\vec{v}=(0,1)$)

(انتهت حلول أسئلة النموذج الأول من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

أوجد معادلة القطع الذي إحداثيات أحد محرقيه (a,a) حيث $a \in R^*$ ، ومعادلة دليله المتعلق بهذا المحرق هي $x + y = a$ ، وتباعده المركزي $\sqrt{2}$.

الحل : بفرض $M(x,y)$ نقطة من القطع الزائد و ℓ بعد هذه النقطة عن دليل القطع .

حسب التعريف المشترك للقطوع : $\frac{[MF]}{\ell} = e \Rightarrow [MF] = e \cdot \ell$

نعوض : $\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{2}\,\frac{|x+y-a|}{\sqrt{1+1}}$

نربع الطرفين الموجبين : $(x-a)^2 + (y-a)^2 = |(x+y)-a|^2$

ننشر :

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = (x+y)^2 - 2a(x+y) + a^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay = x^2 + 2xy + y^2 - 2ax - 2ay$$

أخيراً نجد معادلة القطع الزائد المطلوب : $2x \cdot y = a^2 \neq 0$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 40 للثاني – 60 للثالث)

1 – احسب ما يأتي : $2)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - \sqrt{x}\right)$ $\qquad 1)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{e^x + e^{-x} - 2}$

1) الدالة $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{e^x + e^{-x} - 2}$ معرفة في جوار محذوف للصفر

ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$:

$$f(x) = \frac{2\sin^2 x}{e^{-x}\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)} = 2e^x \left(\frac{\sin x}{e^x - 1}\right)^2$$

نضرب ونقسم على $x \neq 0$: $f(x) = 2e^x \left(\frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{\sin x}{x}\right)^2$

ولأن : $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

فإن : $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

---

2) الدالة $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$ معرفة في جوار $+\infty$ ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$

بما أن $x\neq 0$ نكتب : $f(x)=2\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)$

ولأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-1)=-\infty$

---

2 – ليكن المستقيمان L_1 و L_2 المعرفان كما يأتي :

$$L_2:\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{5} \quad \text{و} \quad L_1:\begin{cases}x=2t\\ y=1-2t\\ z=2\end{cases};t\in R$$

بين أن L_1 و L_2 متقاطعان بنقطة يطلب إيجادها . ثم احسب نسبة مثلثية للزاوية الحادة بينهما .

الحل : نعوض معادلات L_1 في L_2 فنجد : $\frac{2t}{4}=\frac{-2t}{3}=0$ ومنه $t=0$

والمستقيمان L_1 و L_2 متقاطعان بالنقطة $(0,1,2)$.

إن $\vec{v}_1(2,-2,0)$ متجه توجيه للمستقيم L_1

و $\vec{v}_2(4,3,5)$ متجه توجيه للمستقيم L_2

لدينا : $|\vec{v}_1|=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

و : $|\vec{v}_2|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

وباعتبار θ الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\cos\theta=\frac{|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}=\frac{|8-6+0|}{2\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}}=\frac{1}{10}$

3 – اكتب العدد المركب $z=-8i$ بالشكل الأسي ، ثم أوجد جذوره التكعيبية واكتبها بالشكل الجبري

الحل : $z=8(0-i)=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=8e^{\frac{3\pi}{2}i}$

جذوره التكعيبية : $\omega_k=2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right)i}$ حيث : $k\in\{0,1,2\}$

$$k=0\Rightarrow\omega_0=2e^{\frac{\pi}{2}i}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\omega_0=2i$$

$$k=1\Rightarrow\omega_1=2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)i}=2e^{\frac{7\pi}{6}i}=2e^{\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)i}$$

$$\omega_1=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\omega_1=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow\omega_1=-\sqrt{3}-i$$

$$k=2\Rightarrow\omega_2=2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)i}=2e^{\frac{11\pi}{6}i}=2e^{\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)i}$$

$$\omega_2=2\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\omega_2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow\omega_2=\sqrt{3}-i$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (50 للأول – 90 للثاني – 50 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ .

2) أوجد على المجال $]0,+\infty[$ معادلة المنحني التكاملي للدالة f المار بالنقطة $A(1,1)$.

1) دالة الفرق : $f(x)-y_\Delta=\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)-x=-\frac{\ln x}{x}$

وبالتالي : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$

نستنتج أن $\Delta: y=x$ مستقيم مقارب للخط C بجوار $+\infty$ (ينعدم الفرق عند $x=1$)

في المجال $]0,1[$ يكون : $\ln x<0$ و $x>0$ وبالتالي : $\frac{\ln x}{x}<0$

إذن : $f(x)-y_{\Delta}>0$ والخط C يقع فوق Δ في هذا المجال .

في المجال $]1,+\infty[$ يكون : $\ln x>0$ و $x>0$ وبالتالي : $\frac{\ln x}{x}>0$

إذن : $f(x)-y_{\Delta}<0$ والخط C يقع تحت Δ في هذا المجال .

2) لدينا : $f(x)=x-(\ln x)'\cdot\ln x$

وبالتالي : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

وحسب الفرض : $1=\frac{1}{2}-0+c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

معادلة المنحني التكاملي : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}$

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $[-2,2]$ وفق : $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ، وبين أن للدالة f قيمة صغرى شاملة وقيمة كبرى شاملة .

2) أثبت أن الخط البياني C متناظر بالنسبة إلى مبدأ الاحداثيات ، ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$.

4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحدد بـ C والمحور $x'x$ حول $x'x$ دورة كاملة .

1) الدالة f مستمرة على المجال $[-2,2]$ واشتقاقية على المجال $]-2,2[$

حيث : $f(-2)=f(2)=0$

المشتقة : $f'(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot x=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

تنعدم المشتقة عند كل من : $x=-\sqrt{2}\,,x=\sqrt{2}$

ويكون : $f\left(-\sqrt{2}\right)=-2\;,\;f\left(\sqrt{2}\right)=2$

ننظم جدول التغيرات :

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

من جدول التغيرات نستنتج أن : $f([-2,2])=[-2,2]$

فا للدالة قيمة صغرى شاملة هي : $f\left(-\sqrt{2}\right)=-2$

وقيمة كبرى شاملة هي : $f\left(\sqrt{2}\right)=2$

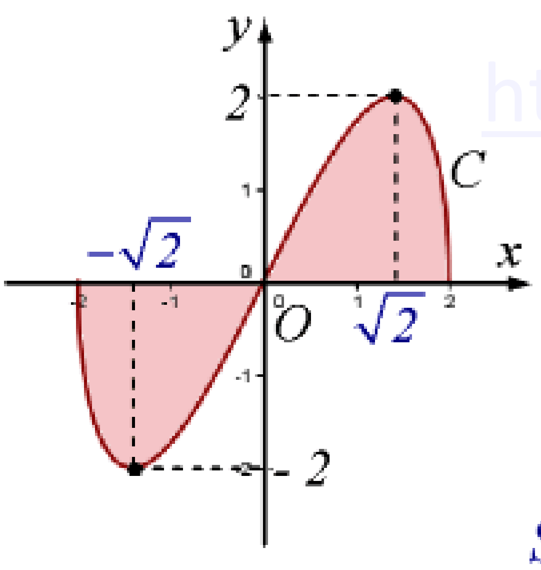
2) شرطا الدالة الفردية :

$$\forall x \in D=[-2,2]: -x \in [-2,2]=D \quad \dots(1)$$

$$f(-x)=-x\sqrt{4-(-x)^2}=-x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f(-x)=-f(x) \quad \dots(2)$$

من تحقق الشرطين نستنتج أن f دالة فردية

وبالتالي خطها البياني C متناظر بالنسبة إلى المبدأ .



3) بما أن الخط البياني C متناظر بالنسبة إلى المبدأ

يمكن حساب مساحة أحد السطحين لتساويهما وضربه بـ 2 .

$$S=2\int_a^b f(x)dx=\int_0^2 2x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$S=-\int_0^2 -2x\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$S=\int_2^0 \left(4-x^2\right)'\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$S=\left[\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_2^0 \Rightarrow S=\frac{16}{3}$$

4) نحسب أحد الحجمين لتساويهما ونضربه بـ 2 : (يمكن حساب الحجم بشكل كامل)

$$V=2\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 2\pi\int_0^2 x^2\left(4-x^2\right)dx$$

$$V=2\pi\int_0^2\left(4x^2-x^4\right)dx = 2\pi\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$V=2\pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)\Rightarrow V=\frac{128\pi}{15}$$

السؤال الثالث : أثبت أن المعادلة $4x^2+y^2-2y-3=0$ تمثل معادلة قطع ناقص .

عين مركزه وذراه ومحرقيه واكتب معادلتي المماسين للقطع في طرفي قطره الصغير ثم ارسمه .

$$4x^2+\left(y^2-2y+1\right)-4=0$$

$$4x^2+(y-1)^2=4\Rightarrow x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

وهي معادلة قطع ناقص لأنها من الصيغة : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

مركزه $O'(0,1)$ وفيه : $a=1\ ,\ b=2$

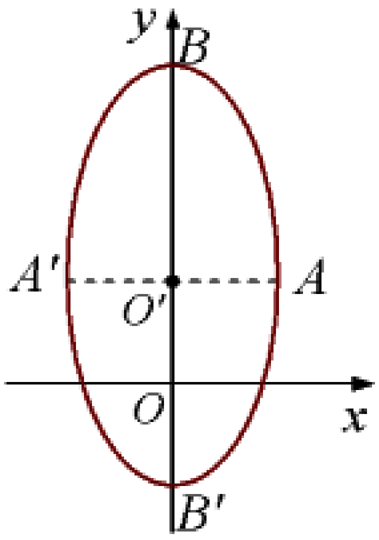
$a<b$ فالمحور المحرقي منطبق على $y'y$

$$A\left(x_0+a,y_0\right)\Rightarrow A(1,1)$$

$$A'\left(x_0-a,y_0\right)\Rightarrow A'(-1,1)$$

$$B\left(x_0,y_0+b\right)\Rightarrow B(0,3)$$

$$B'\left(x_0,y_0-b\right)\Rightarrow B'(0,-1)$$



لدينا : $c^2=b^2-a^2=4-1=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$

$$F\left(x_0,y_0+c\right)\Rightarrow F\left(0,1+\sqrt{3}\right)$$

$$F'\left(x_0,y_0-c\right)\Rightarrow F'\left(0,1-\sqrt{3}\right)$$

معادلتي المماسين في طرفي قطره الصغير هما (شاقوليان) : $x=-1\ ,\ x=1$

السؤال الرابع : صندوقان متماثلان فيهما بطاقات متماثلة :

الصندوق (I) يحتوي ثلاث بطاقات مرقمة بالأعداد $1, 2, 3$

الصندوق (II) يحتوي خمس بطاقات مرقمة بالأعداد $2, 3, 4, 5, 6$

1) نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه بطاقتان معاً، فإذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين زوجي . احسب احتمال أن تكون البطاقتان قد سحبتا من الصندوق (I) .

2) نسحب عشوائياً بطاقتان من الصندوق (I) ، ونسحب عشوائياً بطاقة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة من الصندوقين . اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم نظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

1) بفرض A حدث اختيار الصندوق (I) فيكون A' حدث اختيار الصندوق (II)

حيث : $P(A)=P(A')=\frac{1}{2}$

بفرض B حدث كون مجموع رقمي البطاقتين زوجي وبالتالي : (زوجيتان أو فرديتان)

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)+P(A')\cdot P_{A'}(B)$$

احتمال مجموعهما زوجي من الأول : $P_A(B)=\frac{C(2,2)}{C(3,2)}=\frac{1}{3}$

احتمال مجموعهما زوجي من الثاني : $P_{A'}(B)=\frac{C(3,2)+C(2,2)}{C(5,2)}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$

نعوض : $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\Rightarrow P(B)=\frac{11}{30}$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

إذن : $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{30}{11}\Rightarrow P_B(A)=\frac{5}{11}$

2) ننظم جدول لتوضيح قيم المتغير العشوائي ويستفاد منه لإيجاد جدول القانون الاحتمالي :

+	2	3	4	5	6
$1+2=3$	5	6	7	8	9
$1+3=4$	6	7	8	9	10
$2+3=5$	7	8	9	10	11

إذن قيم المتغير العشوائي : $X(\Omega)=\{5,6,7,8,9,10,11\}$

r_k	5	6	7	8	9	10	11
$f(r_k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{7} r_k \cdot f(r_k)$$

$$E(X)=\frac{1}{15}(5+12+21+24+27+20+11)=\frac{120}{15}\Rightarrow E(X)=8$$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R وفق : $f(x)=(x-1)e^x$

1) أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أن مشتق الدالة f من المرتبة n حيث $n\in N^*$

يعطى بالعلاقة : $f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها وأوجد ما للخط C من مقاربات توازي $x'x$.

دل على القيمة الصغرى محلياً وبين فيما إذا كانت قيمة صغرى شاملة .

3) ادرس بحسب قيم $\lambda\in R$ قابلية المعادلة $f(x)=\lambda$ للحل .

4) أوجد نقطة من C التي من أجلها يكون $f''(x)=0$ وارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم

C واستنتج منه رسم الخط C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة : $f_1(x)=x\,e^{x+1}$

5) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحورين الإحداثيين .

1) a : من أجل $n=1$ يكون : $f^{(1)}(x)=(x+1-1)e^x=x\cdot e^x$

ولدينا : $f'(x)=e^x+e^x(x-1)=x\cdot e^x$

ومنه $f^{(1)}(x)=f'(x)$ فالعلاقة صحيحة من أجل $n=1$

b : نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k$ أي : $f^{(k)}(x)=(x+k-1)e^x \;\ldots(*)$

c : نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = k + 1$

أي لنبرهن أن : $f^{(k+1)}(x) = (x + k)e^x$

إن : $f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x)\right]' = \left[(x + k - 1)e^x\right]'$

إذن : $f^{(k+1)}(x) = e^x + e^x(x + k - 1) = (x + k)e^x$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n = k + 1$ وحسب الاستقراء الرياضي العلاقة (*) صحيحة .

2) الدالة f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $R =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^x - e^x\right) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب للخط C منطبق على $x'x$ بجوار $-\infty$.

المشتقة : $f'(x) = x \cdot e^x$

تنعدم المشتقة عند $x = 0$ حيث $f(0) = -1$ ، جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

للدالة قيمة صغرى محلياً هي : $f(0) = -1$

وهي قيمة صغرى شاملة لأنه مهما كانت $x \in D = R$ فإن : $f(x) \geq f(0) = -1$

3) من الجدول نجد أن : $f(R) = [-1, +\infty[$ حيث $f(1) = 0$

في حالة $\lambda < -1$ تكون المعادلة $f(x) = \lambda$ مستحيلة الحل .

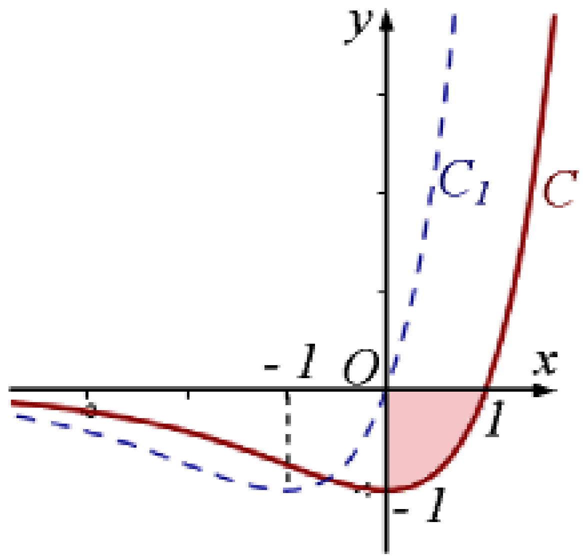
في حالة $\lambda = -1$ يكون للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلاً وحيداً هو $x = 0$.

في حالة $\lambda \in]-1, 0[$ يكون للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلان مختلفان .

في حالة $\lambda \geq 0$ يكون للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلاً وحيداً يوافق $x \geq 1$.

4) من المشتقة الثانية : $f''(x)=(x+1)e^x \;:\; f''(x)=0 \Rightarrow x=-1$

$$f(-1)=-\frac{2}{e} \Rightarrow M\left(-1,-\frac{2}{e}\right)$$



$(1,0)$ نقطة مساعدة لرسم C

f و f_1 معرفتان على R

نلاحظ أن : $f_1(x)=f(x+1)$

إذن ينتج الخط C_1 من C بانسحاب متجهه $\vec{u}=-\vec{i}$

5) حساب المساحة : (تقع تحت محور الفواصل)

$$S=\int_a^b -f(x)\,dx=\int_0^1 (1-x)e^x\,dx$$

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة :

$u(x)=1-x$	$v'(x)=e^x$
$u'(x)=-1$	$v(x)=e^x$

$$S=\left[(1-x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 -e^x\,dx=[0-1]+\left[e^x\right]_0^1$$

$$S=[-1]+[e-1] \Rightarrow S=e-2$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج الثاني من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

المدرس : عبد الحميد السيد

حلول أسئلة النموذج الثالث من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات — الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن f الدالة المعرفة على R وفق : $f(x)=\sin x$ بافتراض أن f اشتقاقية n مرة على R

أثبت بالاستقراء الرياضي أنه أياً كان $n\in N^*$ فإن $f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}n+x\right)$

الحل : لدينا القضية $E(n)$: $f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}n+x\right)$

1) في حالة $n=1$ يكون $f^{(1)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x=f'(x)$

وبالتالي $E(1)$ صحيحة .

2) نفرض أن $E(k)$ صحيحة أي : $f^{(k)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}k+x\right)$

3) نبرهن صحة $E(k+1)$ أي نبرهن أن : $f^{(k+1)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+1)+x\right)$

لدينا : $f^{(k+1)}(x)=\left[f^{(k)}(x)\right]'=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}k+x\right)\right]'$

$$f^{(k+1)}(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}k+x\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+1)+x\right)$$

إذن : $E(k+1)$ صحيحة .

وبالتالي حسب مبدأ الاستقراء الرياضي تكون العلاقة $E(k)$ صحيحة .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 30 للثالث)

1 – ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x}}-3$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-3$ مقارب للخط C .

ثم ادرس وضع الخط البياني C بالنسبة إلى المقارب Δ .

2) إذا كانت النقطة $M(x,y)$ تتحرك على الخط البياني C وكان معدل ابتعادها عن $y'y$

يساوي $4\,cm\cdot s^{-1}$ عندما $x=4$. فأوجد معدل تغير ترتيبها عندئذٍ .

1) دالة الفرق : $f(x)-y_{\Delta}=\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}-3\right)-(x-3)=\frac{2}{\sqrt{x}}$

وبالتالي : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_{\Delta}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

نستنتج أن $\Delta: y=x-3$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

في المجال $]0,+\infty[$ يكون $\frac{2}{\sqrt{x}}>0$ أي $f(x)-y_{\Delta}>0$ فالخط C يقع فوق Δ .

2) الدالة f مستمرة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

وتكتب بالشكل : $f(x)=y=x+2x^{-\frac{1}{2}}-3$

مشتقها : $f'(x)=1-x^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

ونعلم أن : $\frac{dy}{dt}(t)=f'(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)$

ومنه : $\frac{dy}{dt}(t)=\left(1-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}(t)$

نعوض : $\frac{dy}{dt}(t_0)=\left(1-\frac{1}{8}\right)\times 4$

أخيراً نجد : $\frac{dy}{dt}(t_0)=3.5\ cm\cdot s^{-1}$

---

2 – اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(-4,3)$ وإحدى ذروتيه $(0,3)$ وأحد محرقيه $(-9,3)$

ثم أوجد ذروته الأخرى ومحرقه الآخر ومعادلتي مقاربيه وارسمه مع مقاربيه .

من المركز والمحرق نستنتج أن المحور المحرقي يوازي المحور $x'x$.

من المركز والذروة نستنتج : $a=|0+4|=4$

من المركز والمحرق نستنتج : $c=|-9+4|=5$

لدينا : $b^2=c^2-a^2=25-16=9$ ومنه : $b=3$

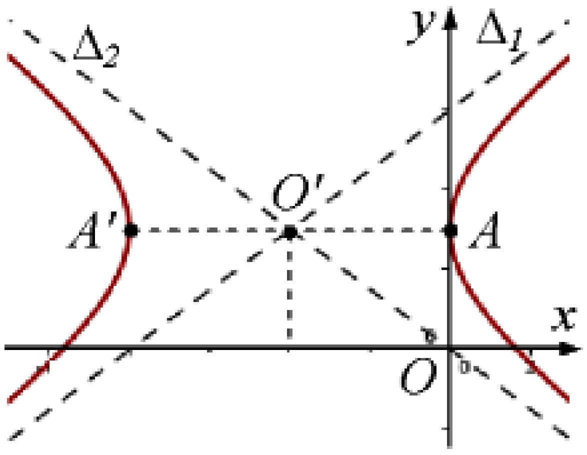
معادلة القطع المطلوب : $\dfrac{(x+4)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

ذروته الأخرى : $A'(x_0-a,y_0)=(-8,3)$

محرقه الآخر : $F(x_0+c,y_0)=(1,3)$

$\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{x+4}{4}$ ومنه : $\Delta_1 : 3x-4y+24=0$

$\dfrac{y-3}{3}=-\dfrac{x+4}{4}$ ومنه : $\Delta_2 : 3x+4y=0$



3 – إذا كان $z=e^{i\theta}\neq -1$ عدداً مركباً فبرهن صحة العلاقة : $\dfrac{2}{z+1}=1-i\tan\dfrac{\theta}{2}$

$$\frac{2}{z+1}=\frac{2}{e^{i\theta}+1}=\frac{2e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}}=1-i\tan\frac{\theta}{2}$$

ملاحظة : يمكن الانطلاق من الطرف الأيمن والوصول إلى الطرف الأيسر

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (80 للأول – 40 للثاني – 80 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R\setminus\{1,3\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

1) إذا علمت أن الدالة f تكتب بالشكل : $f(x)=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$ فأوجد الثابتين A و B .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C يوازي $x'x$ أو يوازي $y'y$

دل على القيمة الكبرى محلياً .

3) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الاحداثيين والمستقيم $x=-2$.

1) نفرق الكسر : $\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$

نضرب طرفيها بـ $x-3\neq 0$ ونجعل x تسعى إلى 3

فنجد : $\dfrac{1}{x-1}=A+\dfrac{B(x-3)}{x-1}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$

نضرب طرفيها بـ $x-1\neq 0$ ونجعل x تسعى إلى 1

فنجد : $\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{A(x-1)}{x-3}+B\Rightarrow B=-\dfrac{1}{2}$

تصبح الدالة : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

2) الدالة f مستمرة واشتقاقية على كل مجال من المجالات : $]-\infty,1[\,,\,]1,3[\,,\,]3,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

فالمستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للخط C منطبق على $x'x$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=-\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط C يوازي $y'y$ والخط C يقع على جانبي مقاربه

$$\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط C يوازي $y'y$ والخط C يقع على جانبي مقاربه

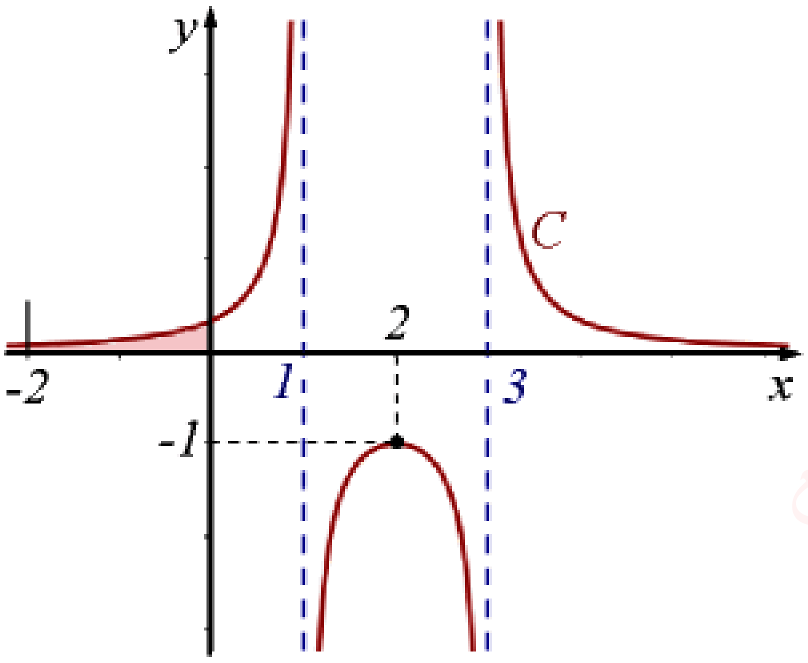
المشتقة : $f'(x)=\dfrac{-2x+4}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$

تنعدم عند $x=2$ ويكون $f(2)=-1$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

من الجدول نستنتج أن للدالة قيمة كبرى محلياً هي : $f(2)=-1$

3) الرسم : نقطة مساعدة $\left(0,\frac{1}{3}\right)$



4) المساحة :

$$S=\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

في المجال $[-2,0]$ يكون :

$x-3<0$ و $x-1<0$ وبالتالي :

$$S=\frac{1}{2}[\ln(3-x)-\ln(1-x)]_{-2}^{0}=\frac{1}{2}[(\ln 3-\ln 1)-(\ln 5-\ln 3)]=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$$

<u>السؤال الثاني</u> :

حل بطريقة غاوس جملة المعادلات : $4x+3y=-2$, $3x+y=1$, $x+2y=-3$

الحل : المصفوفة الموسعة :

$$H=\left(\begin{array}{cc:c}1&2&-3\\3&1&1\\4&3&-2\end{array}\right)$$

نجري التحويل $R_2-3R_1\to R_2$ ثم التحويل $R_3-4R_1\to R_3$

فنجد :

$$H'=\left(\begin{array}{cc:c}1&2&-3\\0&-5&10\\0&-5&10\end{array}\right)$$

نجري التحويل $R_3-R_2\to R_3$ فنجد :

$$H'=\left(\begin{array}{cc:c}1&2&-3\\0&-5&10\\0&0&0\end{array}\right)$$

الجملة المكافئة :

$$\begin{array}{ll}x+2y=-3 & \dots(1)\\ y=-2 & \dots(2)\end{array}$$

نعوض (2) في (1) : $x-4=-3\Rightarrow x=1$

إذن مجموعة الحلول : $S=\{(1,-2)\}$

السؤال الثالث : يحوي صندوق 3 كرات سوداء و 2 كرة بيضاء :

1) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة . فإذا ظهرت كرتين بيضاوين على الأقل . فما احتمال أن تكون الكرات المسحوبة مختلفة باللون .

2) نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً ونعرف المتغير العشوائي X الذي قيمته تساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة . عين قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

1) نفرض الحدث A ظهور كرتين بيضاوين على الأقل (وقع)

(إما A_1 ثلاث كرات بيضاء – بسبب الاعادة – أو A_2 كرتين بيضاوين وكرة سوداء)

والحدث B ظهور ثلاث كرات مختلفة باللون . وبالتالي $A \cap B = A_2$

احتمال ظهور ثلاث كرات بيضاء : $P(A_1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

احتمال ظهور كرتين بيضاوين : $P(A_2) = P(A \cap B) = 3\left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{36}{125}$

احتمال ظهور كرتين بيضاوين على الأقل :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{8}{125} + \frac{36}{125} \Rightarrow P(A) = \frac{44}{125}$$

الاحتمال المطلوب : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{36}{125} \times \frac{125}{44} \Rightarrow P_A(B) = \frac{9}{11}$

2) قيم المتغير العشوائي : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$f(1) = \frac{C(3,1) \times C(2,2)}{C(5,3)} = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$f(2) = \frac{C(3,2) \times C(2,1)}{C(5,3)} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10} \quad , \quad f(3) = \frac{C(3,3)}{C(5,3)} = \frac{1}{10}$$

r_k	1	2	3
$f(r_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} r_k \cdot f(r_k) = \frac{1}{10}(3 + 12 + 3) = \frac{18}{10} \Rightarrow E(X) = 1.8$$

السؤال الرابع : لتكن النقاط : $A(3,0,3)$, $B(1,4,-3)$, $C(1,0,3)$, $D(1,0,-3)$

1) احسب $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}$ ، ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته .

2) احسب طول المتوسط المتعلق بالضلع $[DC]$ في المثلث BCD .

3) أثبت أن المتجه $\overrightarrow{AC}$ ناظم على المستوي BCD .

4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

1)

$$\overrightarrow{BD}=(1-1,0-4,-3+3)=-4\vec{j}$$

$$\overrightarrow{DC}=(1-1,0-0,3+3)=6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$$

نستنتج أن : $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{DC}$ ومنه المثلث BCD قائم في D .

لدينا : $|\overrightarrow{DC}|=6$, $|\overrightarrow{BD}|=4$

وبالتالي مساحة المثلث القائم BCD :

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{DC}|=\frac{1}{2}\times4\times6\Rightarrow S=12$$

2) احداثيات N منتصف $[DC]$: $N\left(\frac{1+1}{2},\frac{0-0}{2},\frac{3-3}{2}\right)=(1,0,0)$

إذن : $[BN]=\sqrt{(1-1)^2+(0-4)^2+(0+3)^2}\Rightarrow[BN]=5$

3) لدينا : $\overrightarrow{AC}=(1-3,0-0,3-3)=-2\vec{i}$ و $\overrightarrow{BD}=-4\vec{j}$ و $\overrightarrow{DC}=6\vec{k}$

فيكون : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

إذن : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DC}$ ومنه المتجه $\overrightarrow{AC}$ ناظم على المستوي BCD .

4) بفرض المثلث BCD قاعدة رباعي الوجوه $ABCD$ يكون ارتفاعه هو طول العمود عليه

أي طول المتجه $\overrightarrow{AC}$: $|\overrightarrow{AC}|=h=2$

حجم رباعي الوجوه = ثلث جداء مساحة قاعدته في ارتفاعه

إذن : $V=\frac{1}{3}S(BCD)\cdot h=\frac{1}{3}(12)(2)\Rightarrow V=8$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

لتكن مجموعة الدوال f المعرفة على $D \subseteq R$ وفق $f(x) = ln(ax + b)$ والمطلوب :

أولاً : عين منها الدالة f التي خطها البياني C يمر من مبدأ الاحداثيات والمستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب للخط البياني C عندما $x \xrightarrow{>} -1$.

ثانياً : من أجل $a = b = 1$ نحصل على الدالة f : $f(x) = ln(x+1)$ خطها البياني C

1) أوجد مجموعة تعريفها وبرهن باستخدام تعريف العدد المشتق أن : $\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

2) اوجد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ واستفد مما سبق في تنظيم جدول تغيرات الدالة f .

3) برهن أن الدالة f تقابل ، ثم عين f^{-1} تقابلها العكسي .

4) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C واستنتج رسم الخط البياني C^{-1} للدالة f^{-1} .

5) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمحور $y'y$ والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ والخط البياني C^{-1} للدالة f^{-1} حول المحور $x'x$ دورة كاملة .

أولاً : بما أن $O(0,0) \in C$ فإن : $0 = ln(b) \Rightarrow b = 1$

تصبح الدالة : $f(x) = ln(ax+1)$

الدالة f معرفة عندما : $ax + 1 > 0$

يكون المستقيم $x = -1$ مقارب للخط C عندما تكون : $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} (ax+1) = 0$

ويتحقق ذلك عندما $-a + 1 = 0$ ومنه : $a = 1$

ثانياً : لدينا $f(x) = ln(x+1)$

1) الدالة f معرفة عندما $x + 1 > 0$ أي : $x > -1$ ومنه : $D =]-1, +\infty[$

الدالة f مستمرة واشتقاقية على $]-1, +\infty[$

ومشتقها $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ وبالتالي : $f'(0) = 1$

وحسب تعريف العدد المشتق : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

نستنتج أن : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$
$f(x)$	‖ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) الدالة $f :]-1,+\infty[\longrightarrow R : f(x) = \ln(x+1)$

متزايدة تماماً وبالتالي f تقابل .

لدينا : $y = f(x) = \ln(x+1)$

وبالتالي : $x + 1 = e^{y} \Rightarrow x = e^{y} - 1$

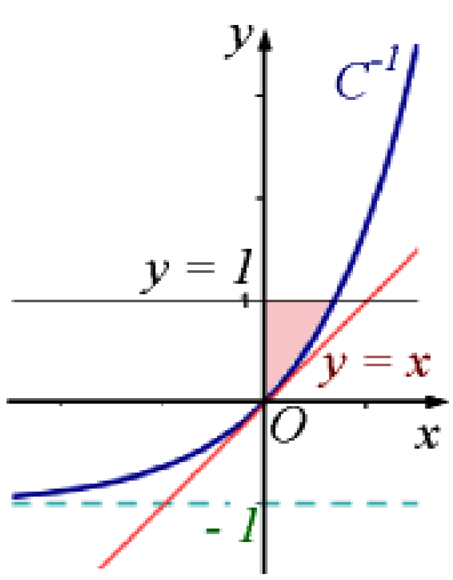
إذن دالة التقابل العكسي :

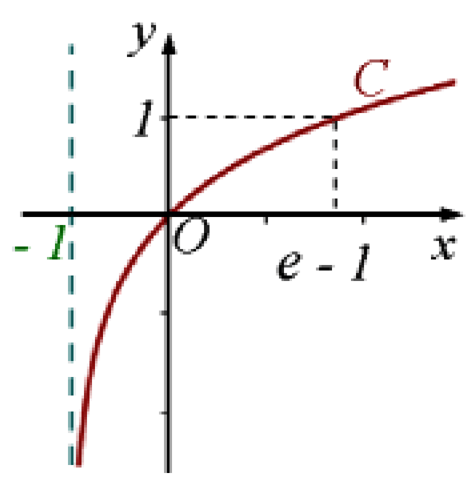
$$f^{-1} : R \longrightarrow]-1,+\infty[: f^{-1}(x) = e^{x} - 1$$

4) رسم الخط البياني C : $(e-1,1), (0,0)$ نقط مساعدة

بما أن f تقابل فإن الخط البياني C^{-1} لتقابلها العكسي

هو نظير الخط C بالنسبة إلى منصف الربع الأول الذي معادلته $y = x$





5) نوجد فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y = 1$ مع الخط C^{-1} :

$$e^{x} - 1 = 1 \Rightarrow e^{x} = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

المستقيم يقع فوق الخط البياني وبالتالي قانون الحجم :

$$V = \pi \int_{a}^{b} \left[y^2 - \left(f^{-1}(x) \right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{\ln 2} \left[1 - \left(e^x - 1 \right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{\ln 2} \left[1 - \left(e^{2x} - 2e^x + 1 \right) \right] dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{\ln 2} \left[2e^x - e^{2x} \right] dx$$

$$V = \pi \left[2e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{0}^{\ln 2}$$

$$V = \pi \left[(4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right] \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج الثالث من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

حلول أسئلة النموذج الرابع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات — الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اعتماداً على تعريف القطع المكافئ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $F(0,-3)$

ومعادلة دليله Δ هي $y=1$. ثم عين ذروته وجهة فتحته وارسمه .

الحل : حسب تعريف القطع المكافئ نكتب : $M(x,y)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow MF=MM'$

حيث $M'(x,1)$ مرتسم M على الدليل Δ .

ومنه : $\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-1)^2}$

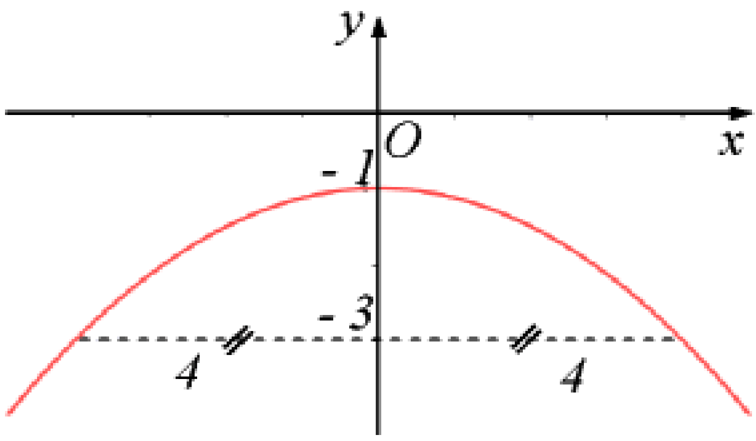
وبالتالي : $x^2+y^2+6y+9=y^2-2y+1$

معادلة القطع : $x^2=-8(y+1)$

المعادلة من الصيغة : $(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$

ذروة القطع : $V(0,-1)$

وبما أن : $p=-2<0$ فإن القطع مفتوح من جهة التراتيب السالبة



ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 40 للثاني – 60 للثالث)

1 – أثبت أن $e^x\geq 1+x$ وذلك مهما كانت x من R . ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

الحل : لدينا $e^x-1-x\geq 0$ ، نلاحظ أن المتراجحة تكافئ $f(x)\geq 0$

حيث f هي الدالة المعرفة على R وفق : $f(x)=e^x-1-x$

وهي دالة مستمرة واشتقاقية على R ومشتقها : $f'(x)=e^x-1$

وتنعدم المشتقة عند $x=0$ ويكون $f(0)=0$

عندما $x<0$ يكون : $0<e^x<1$ ومنه $-1<e^x-1<0$ وبالتالي $f'(x)<0$

عندما $x>0$ يكون : $e^x>1$ ومنه $e^x-1>0$ وبالتالي $f'(x)>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

نلاحظ أن : $f(x)\geq 0$ أياً كان $x\in R$

وبالتالي المتراجحة $e^x\geq 1+x$ محققة .

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ (مبرهنة الاحاطة)

2 – اكتب معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الذي يمر بالنقطة $A(2,0,-2)$ موازياً للمستوي $\mathcal{P}'$ الذي معادلته $2x-2y+z+1=0$ ثم احسب البعد بين المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$

الحل : المتجه $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظم على المستوي $\mathcal{P}'$ وهو نفسه ناظم على المستوي الموازي $\mathcal{P}$

وبفرض M نقطة من المستوي $\mathcal{P}$:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow 2(x-2)-2(y-0)+(z+2)=0$$

إذن معادلة المستوي $\mathcal{P}$ هي : $2x-2y+z-2=0$

البعد بين المستويين المتوازيين هو بعد نقطة من أحدهما عن الآخر

إذن لنحسب بعد النقطة A من المستوي $\mathcal{P}$ عن المستوي $\mathcal{P}'$:

$$d=\frac{|2(2)-2(0)+1(-2)+1|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{3}\Rightarrow d=1$$

a – 3) أثبت أن : $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{36}+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}=2$

$$P_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{36}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{21}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{36}+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{21}$$

$$=(\cos 6\pi+i\sin(-6\pi))+(\cos 14\pi+i\sin 14\pi)$$

$$\boxed{=(\cos 0+i\sin 0)+(\cos 0+i\sin 0)}$$

$$P_1=(1+0)+(1+0)=2\Rightarrow P_1=P_2$$

---

b) إذا كانت $M(x,y)$ صورة العدد المركب $z=x+iy$ أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة النقط M إذا كان : $|iz-1|=|z-1|$

$$|i(x+iy)-1|=|x+iy-1|$$

$$|-(y+1)+ix|=|(x-1)+iy|$$

$$\sqrt{(y+1)^2+x^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$y^2+2y+1+x^2=x^2-2x+1+y^2$$

$$y=-x$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (60 للأول – 70 للثاني – 50 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول : لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . ثم أثبت أن للدالة f قيمة كبرى شاملة .

2) أثبت أن : $\pi^e<e^\pi$

1) الدالة f مستمرة واشتقاقية على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=-\infty$$

المشتقة : $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

وتنعدم عندما $\ln x = 1$ ومنه $x = e$ ويكون $f(e) = \frac{1}{e}$

جدول التغيرات :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

من الجدول نستنتج أنه : أياً كان $x \in]0,+\infty[$ فإن $f(x) \le f(e) = \frac{1}{e}$

إذن للدالة f قيمة كبرى شاملة هي : $f(e) = \frac{1}{e}$

2) الدالة f متناقصة تماماً على $[e,+\infty[$

ولأن $\pi \in [e,+\infty[$ فإن $f(\pi) < f(e)$ أي : $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$

ومنه : $e \ln \pi < \pi \ln e$ ، إذن $\ln\left(\pi^e\right) < \ln\left(e^\pi\right)$

وبما أن الدالة اللوغاريتمية متزايدة تماماً فإن : $\pi^e < e^\pi$

السؤال الثاني : لتكن f دالة معرفة على $]-\infty,3]$ وفق : $f(x) = x\sqrt{3-x}$ خطها البياني C :

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . ثم عين ما للدالة f من قيم كبرى وقيم صغرى محلياً

2) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في المبدأ وادرس وضع C بالنسبة للمماس Δ .

3) ارسم المماس Δ والخط C واحسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين Δ و C والمستقيم الذي معادلته $x = 2$ دورة كاملة حول المحور $x'x$.

1) الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty,3]$ واشتقاقية على المجال $]-\infty,3[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad f(3) = 0$$

المشتقة : $f'(x) = \sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} \cdot x = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$

تنعدم عند : $x = 2$ ، حيث $f(2) = 2$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(2)=2$ قيمة كبرى محلياً (وهي قيمة كبرى شاملة)

$f(3)=0$ قيمة صغرى محلياً (ليست قيمة صغرى شاملة)

2) ميل المماس : $m=f'(0)\Rightarrow m=\dfrac{6}{2\sqrt{3}}\Rightarrow m=\sqrt{3}$

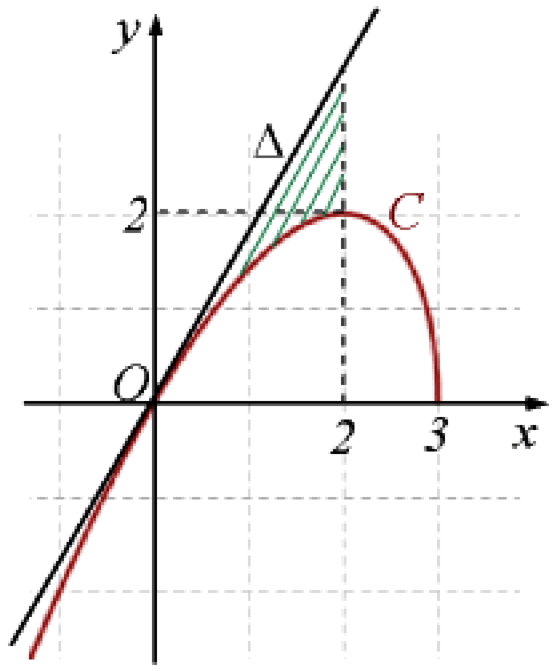
ومعادلة المماس Δ : $y=\sqrt{3}\,x$

$$f(x)-y_{\Delta}=x\sqrt{3-x}-x\sqrt{3}=\frac{x\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}$$

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{x(3-x-3)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}=-\frac{x^2}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}\Rightarrow f(x)-y_{\Delta}\le 0$$

إذن : الخط البياني C يقع تحت المماس Δ فيما عدا نقطة المبدأ حيث يتماسان .

3) الحجم :



$$V=\pi\int_a^b\left[y_{\Delta}^2-(f(x))^2\right]dx$$

$$V=\pi\int_0^2\left(3x^2-x^2(3-x)\right)dx$$

$$V=\pi\int_0^2 x^3\,dx=\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4\pi$$

السؤال الثالث :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي تباعده المركزي $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وأحد محرقيه يقع في المبدأ ومعادلة دليله Δ المتعلق بهذا المحرق هي $x+1=0$ ، عين مركزه وطولا قطريه .

الحل : بفرض $M(x,y)$ نقطة من القطع الناقص و ℓ بعد هذه النقطة عن دليل القطع .

حسب التعريف المشترك للقطوع : $\frac{[MF]}{\ell}=e \Rightarrow [MF]=e\cdot\ell$

نعوض : $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{|x+1|}{\sqrt{1+0}}$

نربع الطرفين وننشر :

$$4\left(x^2+y^2\right)=3|x+1|^2$$

$$4x^2+4y^2=3x^2+6x+3$$

$$x^2-6x+4y^2=3$$

$$x^2-6x+9+4y^2=3+9$$

$$(x-3)^2+4y^2=12$$

$$\frac{(x-3)^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$$

مركزه : $O'(3,0)$

طول قطره الكبير : $2a=4\sqrt{3}$ ، طول قطره الصغير : $2b=2\sqrt{3}$

السؤال الرابع :

يحوي صندوق 6 كرات متماثلة (1 حمراء و 2 بيضاء و 3 سوداء)

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون اعادة :

1) احسب احتمال ظهور الكرة الحمراء في السحبة الأولى .

2) إذا ظهرت كرة بيضاء على الأقل فما احتمال ظهور الكرة الحمراء بين الكرات الثلاثة .

3) نعطي للكرة السوداء القيمة (-1) وللكرة البيضاء القيمة (1) وللكرة الحمراء القيمة (n)

ونعرف المتغير العشوائي X الذي يدل على مجموع القيم الناتجة من الكرات الثلاثة .

اكتب قيم المتغير العشوائي X بدلالة (n) . ونظم جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب قيمة (n)

كي تكون اللعبة عادلة .

1) نفرض A حدث ظهور الكرة الحمراء في السحبة الأولى (حمراء ثم أثنتين من باقي الألوان)

$$P(A)=\frac{p(1,1)\times p(5,2)}{p(6,3)}=\frac{1\times5\times4}{6\times5\times4}=\frac{1}{6}$$

2) نفرض B حدث ظهور كرة بيضاء على الأقل وهو حدث مضاد لعدم ظهور أي كرة بيضاء

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{C(4,3)}{C(6,3)}=1-\frac{4}{20}\Rightarrow P(B)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

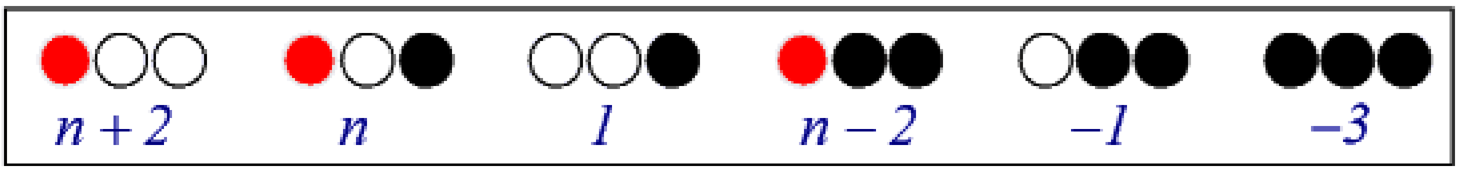
نفرض D حدث ظهور الكرة الحمراء

وبالتالي $B\cap D$ يمثل حدث ظهور كرة حمراء وكرتين بيضاوين أو كرة من كل لون .

$$P(B\cap D)=\frac{C(1,1)\cdot C(2,2)+C(1,1)\cdot C(2,1)\cdot C(3,1)}{C(6,3)}=\frac{1+6}{20}=\frac{7}{20}$$

الاحتمال المطلوب : $P_B(D)=\frac{P(B\cap D)}{P(B)}=\frac{7}{20}\times\frac{20}{16}\Rightarrow P_B(D)=\frac{7}{16}$

3)



قيم المتغير العشوائي هي : $X(\Omega)=\{-3,-1,n-2,1,n,n+2\}$

$$f(-3)=\frac{C(3,3)}{C(6,3)}=\frac{1}{20}\quad,\quad f(-1)=\frac{C(3,2)\cdot C(2,1)}{C(6,3)}=\frac{6}{20}$$

$$f(n-2)=\frac{C(3,2)\cdot C(1,1)}{C(6,3)}=\frac{3}{20}$$

$$f(1)=\frac{C(3,1)\cdot C(2,2)}{C(6,3)}=\frac{3}{20}$$

$$f(n)=\frac{C(3,1)\cdot C(2,1)\cdot C(1,1)}{C(6,3)}=\frac{6}{20}$$

$$f(n+2)=\frac{C(2,2)\cdot C(1,1)}{C(6,3)}=\frac{1}{20}$$

r_k	-3	-1	$n-2$	1	n	$n+2$
$f(r_k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6} r_k\cdot f(r_k)=\frac{1}{20}(-3-6+3n-6+3+6n+n+2)$$

$$E(X)=0\Rightarrow 10n-10=0\Rightarrow n=1$$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

لتكن الدالة f المعرفة على R^* وفق : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ خطها البياني C :

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب للخط C عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . ثم استنتج كل مقارب لـ C يوازي المحور $y'y$.
دل على القيمة الصغرى محلياً للدالة f.

3) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة تقاطعه مع المحور $x'x$ ثم ارسم كل مقارب وجدته و C

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1 , x = 2$.

5) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط λ عدد حلول المعادلة $2x^3 + (1-\lambda)x^2 + 1 = 0$.

1) دالة الفرق : $f(x) - y_\Delta = \left(2x + 1 + \frac{1}{x^2}\right) - (2x+1) = \frac{1}{x^2}$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

أيضاً : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

إذن المستقيم $\Delta : y = 2x + 1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$.

2) الدالة f مستمرة واشتقاقية على كل من المجالين : $]-\infty, 0[,]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب للخط C منطبق على $y'y$ والخط C يقع على جانبيه .

المشتقة : $f'(x) = 2 + \frac{-2x}{x^4} = 2 - \frac{2}{x^3}$

تنعدم عند $x = 1$ ، حيث $f(1) = 4$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

للدالة قيمة صغرى محلياً هي : $f(1)=4$

3) نجعل $f(x)=0$: $2x+1+\frac{1}{x^2}=0$ وبما أن $x\neq 0$ فإن $2x^3+x^2+1=0$

نلاحظ أن مجموع أمثال الحدود الزوجية = مجموع أمثال الحدود الفردية

وبالتالي $x+1$ هو أحد عوامل الطرف الأيسر أي $x=-1$ أحد حلول المعادلة

لذا نجري التحليل إلى مجاميع فئات ثم لجداء عوامل أو عملية القسمة المطولة

$$2x^3+2x^2-x^2+1=0$$
$$2x^2(x+1)-(x+1)(x-1)=0$$
$$(x+1)\left(2x^2-x+1\right)=0$$

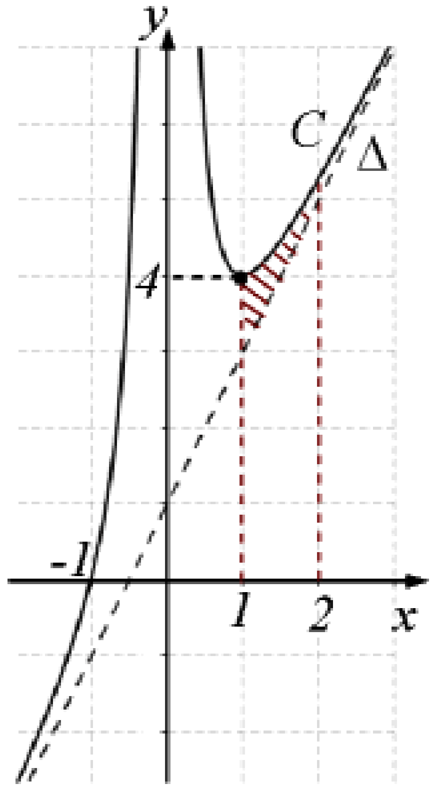
إما : $2x^2-x+1=0$ وهي مستحيلة الحل لأن $\Delta=1-8=-7<0$

أو : $x=-1$ وبالتالي نقطة التماس $(-1,0)$

نحسب الميل من المشتقة : $m=f'(-1)=2-\frac{2}{-1}\Rightarrow m=4$

معادلة المماس : $y=4(x+1)$

ـ الرسم :



4) المساحة : (الخط C يقع فوق المقارب Δ)

$$S=\int_{a}^{b}[f(x)-y_{\Delta}]dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx$$

$$S=\int_{1}^{2}x^{-2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}$$

5) بما أن $x=0$ ليس حلاً للمعادلة فإن : $2x+1-\lambda+\dfrac{1}{x^2}=0$

ومنه $\lambda=2x+1+\dfrac{1}{x^2}=f(x)$ وهو مستقيم يوازي $x'x$ معادلته $y=\lambda$:

1 – عندما $\lambda\in]-\infty,4[$ المستقيم يقطع C بنقطة واحدة فيكون للمعادلة حل وحيد .

2 – عندما $\lambda=4$ المستقيم يقطع C بنقطتين فيكون للمعادلة حلين .

3 – عندما $\lambda\in]4,+\infty[$ المستقيم يقطع C بثلاثة نقاط فيكون للمعادلة ثلاثة حلول .

(انتهت حلول أسئلة النموذج الرابع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن الدالة f المعرفة على $D=[0,2\pi]$ وفق $f(x)=\sin x+\cos x+1$

أثبت أن للدالة قيمة كبرى شاملة وقيمة صغرى شاملة .

الحل : لدينا $f(0)=f(2\pi)=2$

الدالة اشتقاقية على $[0,2\pi]$ ومشتقها : $f'(x)=\cos x-\sin x$

تنعدم المشتقة عندما : $\cos x=\sin x$

ومنه $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ أي عند : $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$

حيث : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+1$ و $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\sqrt{2}+1$	$\searrow$	$-\sqrt{2}+1$	$\nearrow$	2

نلاحظ أن : $f(D)=\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$

إذن للدالة f قيمة كبرى شاملة تساوي $1+\sqrt{2}$

لأنه أياً كانت $x\in[0,2\pi]$ فإن : $f(x)\le 1+\sqrt{2}$

وللدالة f قيمة صغرى شاملة تساوي $1-\sqrt{2}$

لأنه أياً كانت $x\in[0,2\pi]$ فإن : $f(x)\ge 1-\sqrt{2}$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

1 – باستخدام مبرهنة الاحاطة أثبت أن :

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} e^{x-\sin x}=0 \quad ، \quad b)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}=+\infty$$

الحل : نعلم أياً كانت $x \in R$ فإن : $-1 \le \sin x \le 1$

إذن : $1 \ge -\sin x \ge -1 \Rightarrow x+1 \ge x-\sin x \ge x-1$

بما أن الدالة الأسية متزايدة فإن : $e^{x+1} \ge e^{x-\sin x} \ge e^{x-1}$

a) بجوار $-\infty$ لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+1} = 0 \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0$

وحسب مبرهنة الإحاطة تكون : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-\sin x} = 0$

b) بجوار $+\infty$ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x+1} = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$

نأخذ المتراجحة : $e^{x-\sin x} \ge e^{x-1}$

وحسب مبرهنة الإحاطة تكون : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$

---

2 – لتكن النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(3,5,-3)$ و $C(1,2,\alpha)$

1) عين قيمة α من R ليكون المثلث ABC قائماً في B .

2) بفرض $\alpha=-1$ أوجد $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$ واكتب معادلة المستوي المار بالنقاط A , B , C

واحسب مساحة المثلث ABC وقيمة $\sin B$.

1) يكون المثلث قائم في B إذا كان : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + (\alpha+3)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 + 6 + 2(\alpha+3)$$
$$2\alpha + 14 = 0 \Rightarrow \alpha = -7$$

2) تصبح $C(1,2,-1)$ وبالتالي $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

إن : $\vec{n} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ متجه ناظم على المستوي المطلوب

بفرض $M(x, y, z)$ نقطة من هذا المستوي فإن :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow 2(x-2)-2(y-3)-(z+1)=0$$

أي : $2x-2y-z+1=0$ وهي معادلة المستوي المطلوب

$$|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}|=\sqrt{4+4+1}=3$$

مساحة المثلث ABC : $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}| \Rightarrow S=\frac{3}{2}$

$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{1+4+4}=3 \ , \ |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$$

$$\sin B=\frac{|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{3}{3\sqrt{17}} \Rightarrow \sin B=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

3 – باستعمال طريقة غاوس أثبت أن جملة المعادلات الآتية مستحيلة الحل :

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=5 \\ x+3y+5z+7w=11 \\ x-z-2w=-6 \end{cases}$$

نكتب المصفوفة الموسعة : $H=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right)$

نجري التحويل $R_2-R_1\to R_2$ ثم التحويل $R_3-R_1\to R_3$ فنجد :

$$H'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right)$$

نجري التحويل $R_3+2R_2\to R_3$ فنجد : $H'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

نلاحظ وجود معادلة متناقضة $0=1$ فالجملة مستحيلة الحل .

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (80 للأول – 90 للثاني – 60 للثالث – 50 للرابع)

السؤال الأول :

ليكن C_f الخط البياني للدالة f المعرفة على $R\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$

وليكن C_g الخط البياني للدالة g المعرفة على $R\setminus\{1\}$ وفق : $g(x)=x-1+\frac{1}{x-1}$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لكل من الخطين C_f و C_g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$. ثم ادرس الوضع النسبي للخطين C_f و C_g .

2) احسب مساحة السطح المحدد بالخطين C_f و C_g والمستقيمين : $x=-3$, $x=-5$.

1) لدينا الفرق : $f(x)-y_\Delta=\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)-(x-1)=\frac{1}{x+1}$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$

نستنتج أن $\Delta: y=x-1$ مستقيم مقارب للخط C_f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

ولدينا الفرق : $g(x)-y_\Delta=\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)-(x-1)=\frac{1}{x-1}$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-y_\Delta\right]=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-y_\Delta\right]=0$

نستنتج أن $\Delta: y=x-1$ مستقيم مقارب للخط C_g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

دالة الفرق :

$$f(x)-g(x)=\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)$$

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{1-x^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	C_f تحت C_g		C_f فوق C_g		C_f تحت C_g

2) في المجال $[-5,-3]$ يكون C_f تحت C_g وبالتالي المساحة :

$$S=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_{-5}^{-3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

في المجال $[-5,-3]$ يكون $x-1<0$ و $x+1<0$ وبالتالي :

$$S=[\ln(-x+1)-\ln(-x-1)]_{-5}^{-3}$$

$$S=[\ln(4)-\ln(2)]-[\ln(6)-\ln(4)]$$

$$S=3\ln(2)-\ln(6)=\ln\frac{8}{6}=\ln\frac{4}{3}$$

السؤال الثاني : ليكن القطع الزائد الذي معادلته : $4x^2-y^2-2y=5$

1) عين مركزه وذروتيه ومحرقيه واحسب تباعده المركزي واكتب معادلتي مقاربيه ثم ارسمه .

2) اكتب معادلة كل مماس للقطع الزائد ميله يساوي ($2\sqrt{2}$) .

1) نتمم إلى مربع كامل : $4x^2-(y^2+2y+1-1)=5$

ومنه : $4x^2-(y+1)^2=4$

إذن : $x^2-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ محوره المحرقي يوازي المحور $x'x$

- مركزه $O'(0,-1)$ ، $a=1$ ، $b=2$

- ذروتيه : $A(x_0+a,y_0)\Rightarrow A(1,-1)$

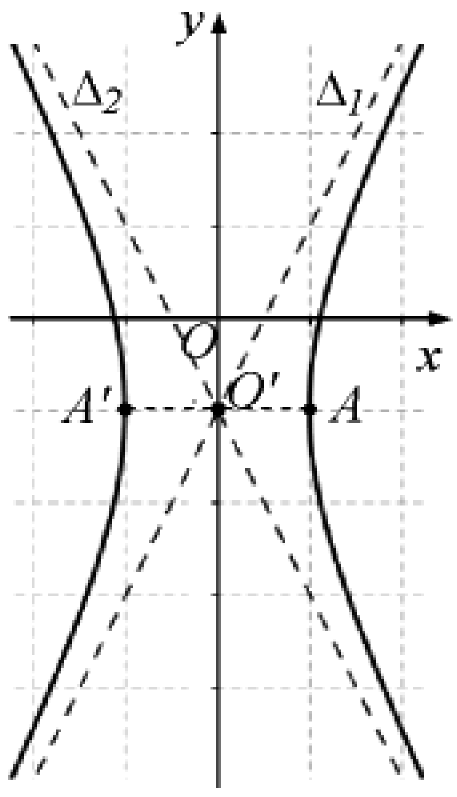
$A'(x_0-a,y_0)\Rightarrow A'(-1,-1)$

لدينا : $c^2=a^2+b^2=5$ ومنه : $c=\sqrt{5}$

- محرقيه : $F(x_0+c,y_0)\Rightarrow F(\sqrt{5},-1)$

$F'(x_0-c,y_0)\Rightarrow F'(-\sqrt{5},-1)$

- تباعده المركزي : $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$



المقارب الأول : $\frac{y+1}{2}=x$ ومنه : $\Delta_1 : y=2x-1$

المقارب الثاني : $\frac{y+1}{2}=-x$ ومنه : $\Delta_2 : y=-2x-1$

2) نشتق معادلة القطع بالنسبة إلى x باعتبار $y=f(x)$: $2x-\frac{2(y+1)\cdot y'}{4}=0$

نعوض قيمة الميل : $x-\frac{(y+1)\times 2\sqrt{2}}{4}=0$ ومنه $(y+1)=\sqrt{2}x$

نعوض في معادلة القطع : $x^2-\frac{2x^2}{4}=1$ ومنه : $x^2=2$

إما : $x_1=\sqrt{2}$ وبالتالي : $y_1=1$ ومنه نقطة التماس الأولى $(\sqrt{2},1)$

معادلة المماس الأول : $y-1=2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$ ومنه : $y=2\sqrt{2}x-3$

أو : $x_2=-\sqrt{2}$ وبالتالي : $y_2=-3$ ومنه نقطة التماس الثانية $(-\sqrt{2},-3)$

معادلة المماس الثاني : $y+3=2\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$ ومنه : $y=2\sqrt{2}x+1$

<u>طريقة ثانية</u> : نكتب حزمة المستقيمات المتوازية $y=2\sqrt{2}x+h$

نعوض : $x=\frac{(y-h)}{2\sqrt{2}}$ في معادلة القطع : $\frac{(y-h)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

ومنه : $y^2-2h\cdot y+h^2-2y^2-4y-2=8$

وبالتالي : $y^2+2(h+2)y+10-h^2=0$

ويجب أن يكون لهذه المعادلة جذر واحد (حالة تماس) أي :

$$\Delta=0 \Rightarrow 4(h+2)^2-4(10-h^2)=0$$

ومنه : $2h^2+4h-6=0 \Rightarrow h^2+2h-3=0 \Rightarrow (h+3)(h-1)=0$

إما : $h=-3$ ومعادلة المماس الأول : $y=2\sqrt{2}x-3$

أو : $h=1$ ومعادلة المماس الثاني : $y=2\sqrt{2}x+1$

السؤال الثالث : صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة .

الصندوق (I) يحتوي (3) كرات مرقمة بالأرقام $1\,,2\,,3$

الصندوق (II) يحتوي (4) كرات مرقمة بالأرقام $2\,,3\,,4\,,5$

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ثم نسحب كرة من الصندوق (II) والمطلوب :

1) نظم جدولاً لفضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار .

2) بفرض الحدث A : إحدى الكرتين على الأقل تحمل رقم 3 .

والحدث B : مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5 . أثبت أن الحدثان $A\,,B$ مستقلان احتمالياً

3) إذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوقين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم نظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

1) فضاء العينة :

$I \backslash II$	2	3	4	5
1	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
2	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
3	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$

2) من الجدول نجد : $P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\;,\;P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\;,\;P(A\cap B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

وبما أن : $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

فإن : $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ وهو المطلوب .

3) مجموعة قيم المتغير العشوائي : $X(\Omega)=\{3,4,5,6,7,8\}$

جدول القانون الاحتمالي :

r_k	3	4	5	6	7	8
$f(r_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6} r_k\cdot f(r_k)=\frac{1}{12}(3+8+15+18+14+8)=\frac{66}{12}\Rightarrow E(X)=\frac{11}{2}$$

السؤال الرابع :

انطلاقاً من دستور أويلر اكتب $cos^4\theta$ بشكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ .

ثم أوجد $\int cos^4 x\,dx$ اعتماداً على ما تجده .

حسب دستور أويلر :
$$cos^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4$$

باستخدام منشور ثنائي الحد :
$$cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$
$$cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$
$$cos^4\theta=\frac{1}{16}\left[\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)+4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right]$$

باستخدام دستور أويلر مرة أخرى :
$$cos^4\theta=\frac{1}{16}(2\cos 4\theta+8\cos 2\theta+6)$$
$$cos^4\theta=\frac{1}{8}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)$$

التكامل :
$$\int cos^4 x\,dx=\int\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)\,dx$$
$$\int cos^4 x\,dx=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+2\sin 2x+3x\right)+c$$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D = R \setminus \{0, 2\}$ وفق : $f(x) = ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها . واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ أو المحور $x'x$.

2) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة تقاطع C مع المحور $x'x$.

3) ارسم كل مقارب وجدته للخط C وارسم المماس Δ ثم ارسم C .

4) استنتج من C الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعينة وفق : $f_1(x) = 2\,ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$

1) الدالة f مستمرة واشتقاقية على كل مجال من المجالات : $]-\infty, 0[\,,\,]0, 2[\,,\,]2, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ln\,1 = 0 \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = ln\,1 = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب للخط C منطبق على $x'x$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب للخط C منطبق على $y'y$ والخط C يقع على جانبيه .

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 2$ مقارب للخط C يوازي $y'y$ والخط C يقع على جانبيه .

المشتقة : $$f'(x) = \frac{\left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2\right]'}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{2\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{4}{x(x-2)}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

2) التقاطع مع $x'x$: $\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^2=0$ ومنه : $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2=1$

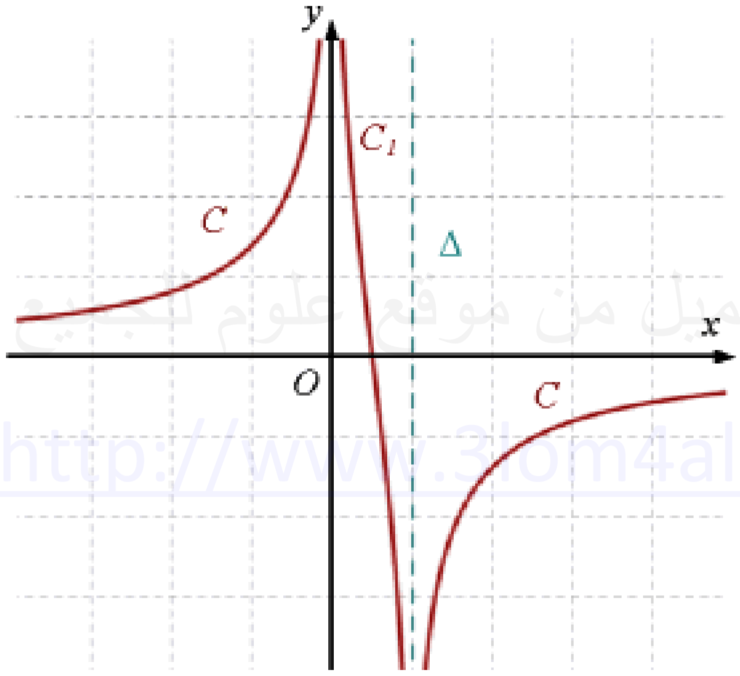
إما : $1-\frac{2}{x}=1 \Rightarrow \frac{2}{x}=0$ مستحيل ، أو : $1-\frac{2}{x}=-1 \Rightarrow x=1$

نقطة التقاطع $(1,0)$

ميل المماس : $m=f'(1)=\frac{4}{1(1-2)}=-4$

معادلة المماس Δ : $y=-4(x-1)$

3) الرسم :



4) الدالة $f_1(x)=2\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$

معرفة عندما $\frac{2-x}{x}>0$ وبالتالي f_1 معرفة على : $D_1=]0,2[\subseteq D$

وأياً كانت $x\in D_1$ فإن :

$$f_1(x)=2\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{x}-1\right)^2=\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^2=f(x)$$

إذن : f_1 مقصور f على D_1

فالخط البياني C_1 هو فرع الخط البياني C الموافق لقيم $0<x<2$

(انتهت حلول أسئلة النموذج الخامس من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

المدرس : عبد الحميد السيد

حلول أسئلة النموذج السادس من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

إذا كانت $\{(x_k , y_k) : 1 \le k \le n\}$ عينة مكونة من n قراءة لثنائيات من المقادير الاحصائية

وكان : $\overline{y^2} = 20$, $\overline{x^2} = 4000$, $\overline{x \cdot y} = 260$, $\overline{y} = 4$, $\overline{x} = 60$

فأوجد مع التسمية كل من المقادير الآتية : σ_x ، σ_y ، σ_{xy} ، r_{xy}

ثم بين مع التعليل نوع الارتباط ، واكتب معادلة مستقيم الانحدار لهذه العينة .

الحل : σ_x الانحراف المعياري للقراءة x : $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{4000 - 3600} = 20$

σ_y الانحراف المعياري للقراءة y : $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{20 - 16} = 2$

σ_{xy} تغاير العينة : $\sigma_{xy} = \overline{x\,y} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 260 - (60)(4) = 20$

r_{xy} معامل ارتباط بيرسون : $r_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{20}{20 \times 2} \Rightarrow r_{xy} = 0.5$

الارتباط ايجابي لأن $r_{xy} > 0$ ومتوسط لأن $0.5 \le |r_{xy}| < 0.7$

معادلة مستقيم الانحدار من الشكل : $\dfrac{y - \overline{y}}{\sigma_y} = r_{xy}\left(\dfrac{x - \overline{x}}{\sigma_x}\right)$

نعوض : $\dfrac{y - 4}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x - 60}{20}\right)$ ومنه : $y = 0.05\,x + 1$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

$1 - a$) علل سبب عدم وجود نهاية للدالة $f(x) = \sqrt{2x - 1 - x^2}$ عند $x = 1$.

الدالة تكتب بالشكل : $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$ معرفة عندما $-(x-1)^2 \ge 0$

ومنه $(x-1)^2 \le 0$ وتتحقق هذه عندما $x = 1$ فقط أي : $D = \{1\}$

بما أنه لا يوجد جوار محذوف للعدد 1 محتوى في مجموعة تعريف الدالة فالنهاية غير موجودة

b) فرق الكسر $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+x}$ إلى مجموع كسور جزئية واحسب $\int f(x)\cdot dx$ على $]-\infty,0[$

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+1}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $x\neq 0$ ونجعل x تسعى إلى الصفر فنجد :

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=A+\frac{B\cdot x^2+C\cdot x}{x^2+1}\Rightarrow A=-1$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $x\neq 0$ ونجعل x تسعى إلى $+\infty$ فنجد :

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=A+\frac{B\cdot x^2+C\cdot x}{x^2+1}\Rightarrow 1=-1+B$$ ومنه : $B=2$

نعوض $A=-1$ و $B=2$ و $x=1$ فنجد :

$$\frac{0}{2}=-\frac{1}{1}+\frac{2+C}{2}$$ ومنه : $C=0$

إذن : $f(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}$

$$\int f(x)\cdot dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

في المجال $]-\infty,0[$ تكون $x<0$ وبالتالي :

$$\int f(x)\cdot dx=-\ln(-x)+\ln\left(x^2+1\right)+c$$

2 – صندوقان متماثلان أحدهما I يحوي كرتين حمراوين وثلاث كرات بيضاء ، والآخر II يحوي n كرة حمراء وكرة واحدة بيضاء . نختار عشوائياً صندوقاً ، ثم نسحب منه كرة واحدة فقط .

ليكن A حدث الحصول على كرة بيضاء ، وليكن B حدث اختيار الصندوق II .

احسب n إذا علمت أن $P_A(B)=\dfrac{1}{4}$.

الحل : إن B' حدث اختيار الصندوق I وبالتالي : $P(A)=P(B'\cap A)+P(B\cap A)$

$$P(A)=P(B')\cdot P_{B'}(A)+P(B)\cdot P_B(A)$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{3n+8}{10(n+1)}$$

$$P(B\cap A)=P(B)\cdot P_B(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2(n+1)}$$

$$P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2(n+1)}\times\frac{10(n+1)}{3n+8}$$

$$\frac{5}{3n+8}=\frac{1}{4}\Rightarrow 3n+8=20\Rightarrow n=4$$

3 – عين قيمة الوسيط α لكي يتعامد المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ حيث : $\begin{cases}\mathcal{P}_1: \alpha x+y-z-2=0\\ \mathcal{P}_2: x+\alpha y-2z+\alpha=0\end{cases}$

واحسب بعد النقطة $A(1,2,1)$ عن فصلهما المشترك .

الحل : $\vec{n}_1(\alpha,1,-1)$ متجه ناظم على المستوي $\mathcal{P}_1$.

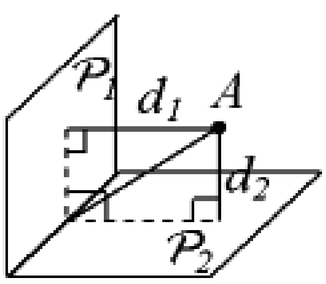
$\vec{n}_2(1,\alpha,-2)$ متجه ناظم على المستوي $\mathcal{P}_2$.

يتعامد المستويان عندما يتحقق : $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

ومنه : $\alpha+\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=-1$

من أجل $\alpha=-1$ نجد : $\begin{cases}\mathcal{P}_1: -x+y-z-2=0\\ \mathcal{P}_2: x-y-2z-1=0\end{cases}$ وهما مستويان متعامدان كما وجدنا

حيث يصبح : $\vec{n}_1(-1,1,-1)$ و $\vec{n}_2(1,-1,-2)$



بعد النقطة A عن $\mathcal{P}_1$: $d_1=\frac{|-1+2-1-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

بعد النقطة A عن $\mathcal{P}_2$: $d_2=\frac{|1-2-2-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$

بما أن المستويان متعامدان فإن بعد النقطة A عن الفصل المشترك (حسب مبرهنة فيثاغورث)

$$d^2=d_1^2+d_2^2=\frac{4}{3}+\frac{16}{6}=\frac{12}{3}=4\Rightarrow d=2$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 70 للثاني – 90 للثالث – 50 للرابع)

السؤال الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty,1]$ وفق : $f(x)=x+2\sqrt{1-x}$ خطها البياني C :

1) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=1$ من اليسار .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، ثم دل على كل قيمة كبرى أو صغرى محلياً .

1) نطبق معيار قابلية الاشتقاق : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x+2\sqrt{1-x}-1}{x-1}=1-\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

فالدالة f ليست اشتقاقية عند $x=1$ من اليسار .

2) الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty,1]$ واشتقاقية على المجال $]-\infty,1[$ و $f(1)=1$

الدالة معرفة بجوار $-\infty$ ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $-\infty+\infty$ وفي حال $x<0$ نكتب :

$$f(x)=x-2x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)$$

ولأن : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=0$

فإن : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty(1)=-\infty$

المشتقة : $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

تنعدم المشتقة عندما $x=0 \Leftarrow \sqrt{1-x}=1$ وبالتالي $f(0)=2$

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

إذن : $f(0)=2$ قيمة كبرى محلياً و : $f(1)=1$ قيمة صغرى محلياً .

السؤال الثاني :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R^* وفق : $f(x)=ax+\frac{b}{x^3}$ والمطلوب :

1) أوجد قيمة كل من a, b إذا علمت أن للدالة قيمة صغرى محلياً هي $f(1)=4$

2) من أجل $a=-1, b=1$ تصبح الدالة $f(x)=\frac{1}{x^3}-x$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x$ مقارب لـ C وادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

1) بما أن $f(1)=4$ فإن : $a+b=4 \quad \ldots(1)$

الدالة f اشتقاقية على كل من المجالين $]-\infty,0[\,,\,]0,+\infty[$

فالدالة اشتقاقية عند $x=1$

وبما أن $f(1)=4$ قيمة صغرى محلياً للدالة فإن : $f'(1)=0$

حيث : $f(x)=ax+bx^{-3}$ ومنه : $f'(x)=a-3bx^{-4}$

وبالتالي : $\ldots(2) \quad a-3b=0 \Rightarrow a=3b$

نعوض (2) في (1) فنجد : $b=1$ وبالتالي : $a=3$

2) الفرق : $f(x)-y_\Delta=\left(\frac{1}{x^3}-x\right)+x=\frac{1}{x^3}$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$

إذن : Δ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$.

- في المجال $]-\infty,0[$ يكون $\frac{1}{x^3}<0$ ومنه : $f(x)-y_\Delta<0$

وبالتالي C يقع تحت Δ في هذا المجال .

- في المجال $]0,+\infty[$ يكون $\frac{1}{x^3}>0$ ومنه : $f(x)-y_\Delta>0$

وبالتالي C يقع فوق Δ في هذا المجال .

السؤال الثالث :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $M\left(2,\sqrt{6}\right)$ وتقع ذروتان من ذراه عند النقطتين $(-1,0),(3,0)$ ثم عين محرقيه F و F' وارسمه واكتب معادلة المماس للقطع في النقطة M .

أثبت أن القطعة المستقيمة $[FF']$ ترى من أحد طرفي القطر الصغير للقطع ضمن زاوية قائمة

الحل : مركز القطع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الذروتين أي :

$$x_0=\frac{3-1}{2}=1\ ,\ y_0=\frac{0+0}{2}=0$$ وبالتالي : $O'(1,0)$

معادلة القطع : $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

بما أن القطعة المستقيمة الواصلة بين الذروتين توازي محور الفواصل فإن :

$$2a=|3+1|=4\Rightarrow a=2$$

نعوض إحداثيات النقطة M وقيمة a في معادلة القطع :

$$\frac{(2-1)^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{6}{b^2}=1\Rightarrow\frac{6}{b^2}=\frac{3}{4}$$

$$b^2=8\Rightarrow b=2\sqrt{2}$$

فتكون معادلة القطع المطلوبة : $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$

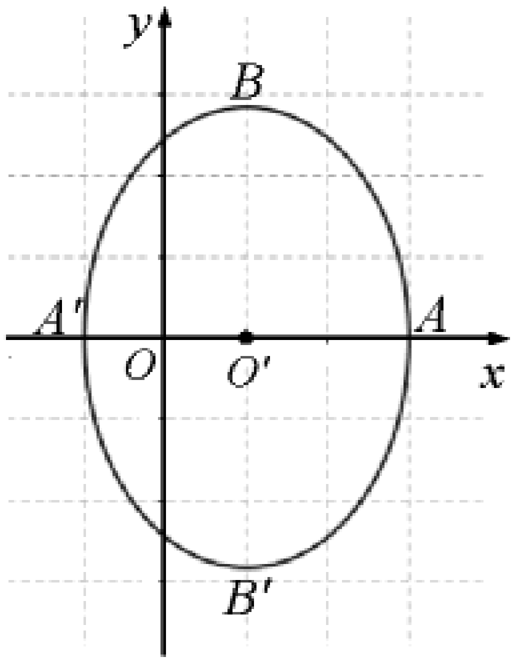
المحور المحرقي يوازي $y'y$

وبالتالي : $c^2=b^2-a^2=8-4=4$ ومنه : $c=2$

محرقيه :

$$F\left(x_0,y_0+c\right)\Rightarrow F(1,2)$$

$$F'\left(x_0,y_0-c\right)\Rightarrow F'(1,-2)$$



نشتق معادلة القطع بالنسبة إلى x باعتبار $y=f(x)$

نجد : $\frac{2(x-1)}{4}+\frac{2y\cdot y'}{8}=0$ (أو نستخدم قانون الميل)

نعوض إحداثيات M : $\frac{(2-1)}{4}+\frac{\sqrt{6}\,m}{8}=0$

وبالتالي ميل المماس : $m=-\frac{2}{\sqrt{6}}$

معادلة المماس : $y-\sqrt{6}=-\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)$

أي : $2x+\sqrt{6}\,y-10=0$

لنأخذ الذروة $A'(-1,0)$:

$$m_{A'F}=\frac{2-0}{1+1}=1 \quad \text{و} \quad m_{A'F'}=\frac{-2-0}{1+1}=-1$$

وبالتالي : $m_{A'F}\cdot m_{A'F'}=-1$

ومنه : $A'F\perp A'F'$ وهو المطلوب .

السؤال الرابع :

أوجد عدداً $\omega\in C$ يحقق المعادلة $\omega^2=-5-12i$.

ثم حل بطريقة الاتمام إلى مربع كامل المعادلة الآتية : $z^2-6iz-4+12i=0$

ω هو جذر تربيعي للعدد $\omega^2=-5-12i$

نفرض أن $\omega=x+yi$ عندئذ :

$$x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13 \quad \ldots(1)$$
$$x^2-y^2=-5 \quad \ldots(2)$$
$$2x\cdot y=-12\Rightarrow y=-\frac{6}{x} \quad \ldots(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد : $2x^2=8\Rightarrow x^2=4$

إما : $x_1=2$ نعوض في (3) فنجد : $y_1=-3$ وبالتالي : $\omega_1=2-3i$

أو : $x_2=-2$ نعوض في (3) فنجد : $y_2=3$ وبالتالي : $\omega_2=-2+3i$

بطريقة ثانية نكتب : $\omega^2 = -5 - 12i = (2)^2 + (3i)^2 - 2(2)(3i) = (2-3i)^2$

$$z^2 - 6iz + (3i)^2 - (3i)^2 - 4 + 12i = 0$$

$$(z-3i)^2 + 9 - 4 + 12i = 0$$

$$(z-3i)^2 = -5 - 12i = \omega^2$$

إما : $z - 3i = 2 - 3i$ ومنه : $z_1 = 2$

أو : $z - 3i = -2 + 3i$ ومنه : $z_2 = -2 + 6i$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

لتكن f الدالة المعرفة على R وفق : $f(x) = \dfrac{4}{1+e^x}$ خطها البياني C :

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها .

2) استنتج من جدول التغيرات أنه إذا كان $\lambda \in R$ فإن المعادلة $\lambda = (4-\lambda)e^{-x}$ لها جذر وحيد عندما $\lambda \in]0,4[$ وغير قابلة للحل عندما $\lambda \in]-\infty,0] \cup [4,+\infty[$.

3) أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة وبين وضع C بالنسبة إلى كل مقارب له .

4) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x + 2$ مماس للخط C في النقطة $A(0,2)$.

5) ارسم كل مقارب وجدته وارسم Δ ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = -\ln 2 , x = \ln 2$

1) الدالة f مستمرة واشتقاقية على $R =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

المشتقة : $f'(x) = -\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f'(x) < 0$

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$4 \searrow 0$

2) المعادلة تكافئ : $\lambda e^x = 4 - \lambda \Rightarrow \lambda\left(e^x + 1\right) = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{1+e^x}$

أي : $f(x) = \lambda$

حسب جدول التغيرات لدينا : $f(x) \in f(]-\infty, +\infty[) =]0, 4[$

وبما أن f مستمرة ومتناقصة تماماً (مطردة) على R فهي تقابل .

ومنه أياً كان $\lambda \in]0, 4[$ فإن للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل وحيد مهما كان $x \in R$.

وبالتالي إذا كان $\lambda \notin]0, 4[$ تكون المعادلة $f(x) = \lambda$ مستحيلة الحل .

ومنه تكون المعادلة مستحيلة الحل عندما $\lambda \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.

3) المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = 4$ مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ في جوار $-\infty$.

ولدينا : $f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{4}{1+e^x} - 4 = -\frac{4e^x}{1+e^x} < 0$ فالخط C يقع تحت المقارب Δ_1 .

المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y = 0$ مقارب للخط C منطبق على المحور $x'x$ في جوار $+\infty$

ولدينا : $f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{4}{1+e^x} > 0$ فالخط C يقع فوق المقارب Δ_2 .

4) نعوض إحداثيات $A(0, 2)$ في معادلة المستقيم :

$2 = 0 + 2$ فالنقطة A تقع على المستقيم Δ .

وفي الدالة : $f(0) = \frac{4}{1+1} \Rightarrow f(0) = 2$

فالنقطة A تقع على الخط البياني C .

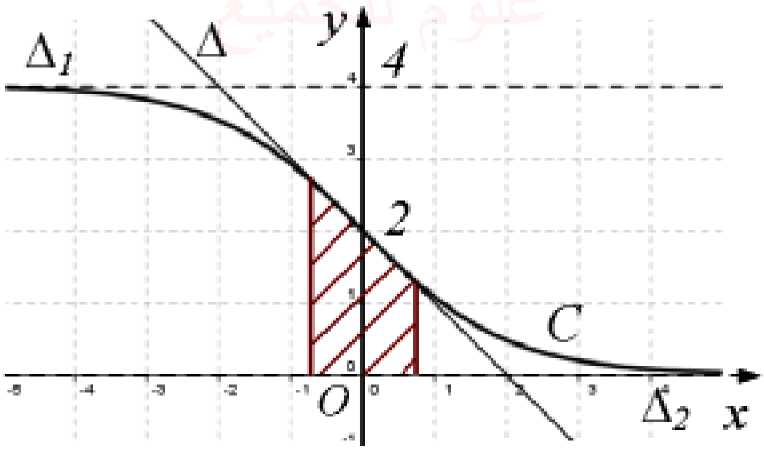
إذن : $A \in C \cap \Delta \ldots (1)$

من مشتقة الدالة : $f'(0)=\frac{-4}{4}=-1$ وميل المستقيم $m=-1$

إذن : $f'(0)=m \ldots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن Δ مماس للخط C في A .

5) الرسم :



6) المساحة :

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{4}{1+e^x}\,dx$$

$$S=-4\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$S=-4\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_{-\ln 2}^{\ln 2}$$

$$S=-4\left(\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)-\ln(2+1)\right)$$

$$S=-4(\ln 3-\ln 2-\ln 3)\Rightarrow S=4\ln 2$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج السادس من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

اعتماداً على التعريف المشترك للقطوع ، بين أن مجموعة النقاط $M\ (x\,, y)$ في المستوي التي نسبة بعدها عن النقطة $F\,(0,0)$ إلى بعدها عن المستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ تساوي $\sqrt{2}$ هي نقاط قطع زائد . ماذا تمثل النقطة F بالنسبة للقطع ؟ وماذا يمثل المستقيم Δ بالنسبة للقطع ؟ أوجد معادلة هذا القطع واكتبها بالصيغة القياسية .

الحل : لدينا $M\ (x\,, y)$ نقطة في المستوي وليكن ℓ بعد هذه النقطة عن المستقيم Δ .

بما أن : $\frac{[MF]}{\ell}=\sqrt{2}>1$ فإن مجموعة النقاط هي نقاط قطع زائد .

النقطة F هي محرق للقطع الزائد .

المستقيم Δ هو دليل القطع الزائد المتعلق بالمحرق F .

وبالتالي : $[MF]=\sqrt{2}\ \ell \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{2}\,\frac{|x-1|}{\sqrt{1+0}}$

نربع الطرفين : $x^2+y^2=2\,|x-1|^2$

ننشر : $x^2+y^2=2x^2-4x+2$

ومنه معادلة القطع الزائد : $x^2-4x-y^2+2=0$

نتمم إلى مربع كامل : $\left(x^2-4x+4-4\right)-y^2+2=0 \Rightarrow (x-2)^2-y^2=2$

الصيغة القياسية للقطع الزائد : $\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ (متساوي الساقين)

ثانياً : حل التمارين الآتية : (40 للأول – 40 للثاني – 70 للثالث)

1 – اسطوانة دورانية قائمة معدنية يزداد نصف قطر قاعدتها بمعدل $0.002\ \ cm\backslash s$ ويزداد ارتفاعها بمعدل $0.008\ \ cm\backslash s$. أوجد معدل زيادة حجم الاسطوانة عندما يكون ارتفاعها $h=40\ cm$ ونصف قطر قاعدتها $r=5\ cm$.

الحل : حجم الاسطوانة : $V=\pi r^2\cdot h$ باعتبار : $r=r(t)$ و $h=h(t)$

بالاشتقاق حسب قاعدة السلسلة نجد معدل تغير الحجم : $\frac{dV}{dt}=\pi\left(2r\frac{dr}{dt}\cdot h+\frac{dh}{dt}\cdot r^2\right)$

نعوض : $\frac{dV}{dt}(t_0)=\pi(2\times 5\times 0.002\times 40+0.008\times 25)$

ومنه : $\frac{dV}{dt}(t_0)=\pi\ cm^3\backslash s$

2 – لتكن النقطة $A(3,-1,1)$ ، والمستوي المعطى بالمعادلة $\mathcal{P}: x-2y+z=0$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي $\mathcal{P}$ هو النقطة $A'(2,1,0)$

الحل : نعوض إحداثيات A' في معادلة $\mathcal{P}$:

$\ell_1=(2)-2(1)+(0)=0=\ell_2$ وبالتالي $A'\in\mathcal{P}$

لدينا : $\vec{n}(1,-2,1)$ متجه ناظم على المستوي $\mathcal{P}$.

ولدينا : $\overrightarrow{AA'}(-1,2,-1)$

وبالتالي نجد : $\overrightarrow{AA'}=-\vec{n}$ أي أن $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AA'}$ مرتبطان خطياً

ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{AA'}$ ناظم على $\mathcal{P}$.

إذن A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي $\mathcal{P}$.

3 – أثبت بطريقة غاوس أن لجملة المعادلات الآتية حلاً وحيداً وأوجده :

$$\begin{aligned}2x&=y+4\\2z&=x+5\\2y&=z-7\end{aligned}$$

نرتب المعادلات على النحو الآتي :
$$\begin{aligned}x-2z&=-5\\2x-y&=4\\2y-z&=-7\end{aligned}$$

نكتب المصفوفة الموسعة :
$$H=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&-5\\2&-1&0&4\\0&2&-1&-7\end{array}\right)$$

نجري التحويل $R_2 - 2R_1 \to R_2$ فنجد :

$$H' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

نجري التحويل $R_3 + 2R_2 \to R_3$ فنجد :

$$H' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن : $r = r' = n = 3$ فاللجملة حل وحيد .

الجملة المكافئة :

$$x - 2z = -5$$
$$-y + 4z = 14$$
$$7z = 21 \Rightarrow z = 3$$

وبالتالي : $z = 3$ ، $y = -2$ ، $x = 1$ ، إذن : $(x, y, z) = (1, -2, 3)$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (80 للأول – 70 للثاني – 50 للثالث – 80 للرابع)

السؤال الأول : احسب ما يأتي :

$$a)\ \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{2x+4} - 4}{x - 6} \quad , \quad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{3 - \sin\frac{1}{x}} \quad , \quad c)\ I = \int e^{\sqrt{x}}\, dx \ ; x \in]0, +\infty[$$

$$a)\ \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{2x+4} - 4}{x - 6}$$

الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{2x+4} - 4}{x - 6}$ معرفة في جوار محذوف للعدد 6

ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$: (نضرب البسط والمقام بمرافق البسط)

$$f(x) = \frac{2x + 4 - 16}{(x - 6)\left(\sqrt{2x+4} + 4\right)} = \frac{2(x - 6)}{(x - 6)\left(\sqrt{2x+4} + 4\right)}$$

في حالة $x \neq 6$ يكون : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+4}+4}$

$$\lim_{x \to 6} f(x) = \frac{2}{\sqrt{12+4}+4} = \frac{1}{4}$$

$$b)\ \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{3 - \sin\frac{1}{x}}$$

في حالة $x \neq 0$ يكون : $-1 \leq -\sin\frac{1}{x} \leq 1$

نضيف 3 فنجد : $2 \leq 3 - \sin\frac{1}{x} \leq 4$

نقلب الحدود الموجبة تماماً فتتغير إشارة المتراجحات : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{3 - \sin\frac{1}{x}} \geq \dfrac{1}{4}$

نضرب بـ $|x| > 0$ فنجد : $\dfrac{|x|}{4} \leq \dfrac{|x|}{3 - \sin\frac{1}{x}} \leq \dfrac{|x|}{2}$

وباعتبار : $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ فحسب مبرهنة الإحاطة : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{3 - \sin\frac{1}{x}} = 0$

$$c)\ I = \int e^{\sqrt{x}}\, dx \ ;\ x \in \left]0, +\infty\right[$$

- <u>طريقة أولى</u> : نغير المتحول $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$

وبالتالي يصبح التكامل : $I = \int 2t \cdot e^t\, dt$

نضع : $u(t) = 2t$ ومنه : $u'(t) = 2$

ونضع : $v'(t) = e^t$ ومنه : $v(t) = e^t$

$$I = 2t \cdot e^t - \int 2e^t\, dt$$

إذن : $I = 2t \cdot e^t - 2e^t + c$

$$I = 2(t-1)e^t + c$$

بالعودة للمتحول الأصلي : $I = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)e^{\sqrt{x}} + c$

- طريقة ثانية : نضرب ونقسم على $2\sqrt{x} \neq 0$

يصبح التكامل : $I = \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

نضع : $u(x) = 2\sqrt{x}$ ومنه : $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ونضع : $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ ومنه : $v(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$I = 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$$

إذن : $I = 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$

$$I = 2\left(\sqrt{x} - 1\right) e^{\sqrt{x}} + c$$

السؤال الثاني :

أوجد معادلة كل قطع مكافئ معادلة محور تناظره $y = 1$ ومعادلة دليله $x = -1$ وطول وتره المحرقي الأساسي يساوي (4) .

الحل : محور تناظر القطع يوازي محور الفواصل ونستنتج أن : $y_0 = 1$

المعادلة القياسية للقطع من الصيغة : $\left(y - y_0\right)^2 = 4p\left(x - x_0\right)$

وبالتالي : $(y - 1)^2 = 4p\left(x - x_0\right) \quad \ldots(1)$

من معادلة الدليل : $x = x_0 - p = -1 \Rightarrow x_0 = p - 1 \quad \ldots(2)$

طول الوتر المحرقي الأساسي : $4|p| = 4 \Rightarrow |p| = 1$

حالة أولى : $p = -1$ نعوض في (2) فنجد : $x_0 = -2$

وفي (1) فنجد : $(y - 1)^2 = -4(x + 2)$

حالة ثانية : $p = 1$ نعوض في (2) فنجد : $x_0 = 0$

وفي (1) فنجد : $(y - 1)^2 = 4x$

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R\setminus\{-2,0\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+2x}$:

1) أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x-2$ مقارب للخط C ، ثم ادرس وضع الخط C بالنسبة إلى Δ .

2) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=-3$, $x=-6$.

1)

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x^3+2}{x^2+2x}-x+2$$

$$=\frac{x^3+2-x^3+2x^2-2x^2+4x}{x^2+2x}$$

$$=\frac{4x+2}{x^2+2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta : y=x-2$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$.

دالة الفرق تنعدم عند $x=-\frac{1}{2}$ ولندرس إشارة الكسر ونستنتج الوضع النسبي :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$4x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2+2x	$+$	0 $-$		$-$ 0	$+$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	‖ $+$	0	$-$ ‖	$+$
الوضع النسبي	C يقع تحت Δ	C يقع فوق Δ		C يقع تحت Δ	C يقع فوق Δ

2) المساحة : في المجال $[-6,-3]$ يكون C يقع تحت Δ

$$S=\int_a^b\left[y_\Delta-f(x)\right]dx=-\int_{-6}^{-3}\frac{4x+2}{x^2+2x}dx=\int_{-3}^{-6}\frac{4x+2}{x(x+2)}dx$$

نفرق الكسر : $\frac{4x+2}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$

نضرب بـ $x\neq 0$ ونجعل x تسعى إلى 0 فنجد :

$$\frac{4x+2}{x+2}=A+\frac{B\cdot x}{x+2}\Rightarrow A=1$$

نضرب بـ $x+2\neq 0$ ونجعل x تسعى إلى -2 فنجد :

$$\frac{4x+2}{x}=\frac{A(x+2)}{x}+B\Rightarrow B=3$$

طريقة ثانية : $\frac{(x+2)+3x}{x(x+2)}=\frac{x+2}{x(x+2)}+\frac{3x}{x(x+2)}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}$

يصبح التكامل : $S=\int_{-3}^{-6}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}\right)dx$

في المجال $[-6,-3]$ يكون $x<0$ و $x+2<0$ وبالتالي :

$$S=[\ln(-x)+3\ln(-x-2)]_{-3}^{-6}$$
$$S=[\ln(6)+3\ln(4)]-[\ln(3)+3\ln(1)]$$
$$S=\ln(3)+\ln(2)+6\ln(2)-\ln(3)$$
$$S=7\ln(2)$$

السؤال الرابع :

إذا كان A و B حدثين مستقلين احتمالياً من الفضاء الاحتمالي الموافق لتجربة عشوائية ، وكان $P(A'\cap B')=\frac{3}{15}$, $P(A\setminus B)=\frac{7}{15}$ فاحسب : $P(A)$, $P(B)$, $P_B(B\setminus A)$

بما أن A و B مستقلين احتمالياً فإن :

A',B' مستقلين احتمالياً ومنه : $\cdots(1)$ $P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')=\frac{3}{15}$

A,B' مستقلين احتمالياً ومنه : $\cdots(2)$ $P(A\setminus B)=P(A\cap B')=P(A)\cdot P(B')=\frac{7}{15}$

بالقسمة : $\frac{P(A')\cdot P(B')}{P(A)\cdot P(B')}=\frac{3}{7}\Rightarrow 3P(A)=7P(A')$

ومنه : $3P(A)=7-7P(A) \Rightarrow P(A)=\dfrac{7}{10}$

نعوض في (2) : $\dfrac{7}{10}P(B')=\dfrac{7}{15} \Rightarrow P(B')=\dfrac{2}{3}$

وبالتالي : $P(B)=1-P(B')=1-\dfrac{2}{3} \Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{3}$

إن : $P_B(B \setminus A)=\dfrac{P(B\cap(B\cap A'))}{P(B)}=\dfrac{P(B\cap A')}{P(B)}$

ولكن A', B مستقلين احتمالياً وبالتالي : $P_B(B \setminus A)=\dfrac{P(B)\cdot P(A')}{P(B)}$

ومنه : $P_B(B \setminus A)=P(A')=1-P(A)$

إذن : $P_B(B \setminus A)=1-\dfrac{7}{10} \Rightarrow P_B(B \setminus A)=\dfrac{3}{10}$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (110 درجات)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(e\cdot x)$ خطها البياني C

ولتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=\dfrac{\ln(e\cdot x)}{e^x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج إشارتها . وارسم خطها البياني C .

2) ادرس تغيرات الدالة g ونظم جدولاً بها ، واستنتج $g(]0,+\infty[)$.

3) برهن أن $F(x)=(1-x)\cdot\ln(x)$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$

ثم احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $x'x$ والمستقيم $x=e$

1) الدالة f مستمرة واشتقاقية على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)=-\infty$$

المشتقة : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{e}{e\cdot x}=-\dfrac{1+x}{x^2}$

وفي المجال $]0,+\infty[$ يكون $f'(x)<0$ والدالة متناقصة تماماً ، جدول التغيرات :

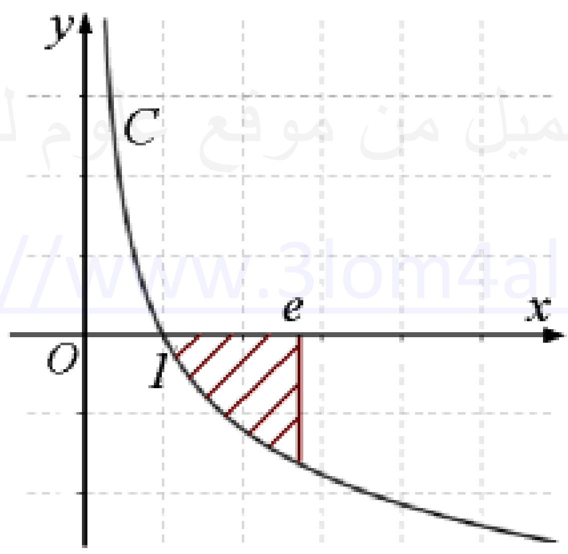
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن : $f(1)=-1-0+\frac{1}{1}=0$ وبالتالي :

في المجال $]0,1[$ يكون $f(x)>0$

وفي المجال $]1,+\infty[$ يكون $f(x)<0$

نأخذ نقطة مساعدة لرسم C مثل : $\left(e,\frac{1}{e}-2\right)$



2) الدالة g مستمرة واشتقاقية على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$$

الدالة g معرفة بجوار $+\infty$ ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{\infty}{\infty}$

وفي حال $x\neq 0$ نكتب $g(x)=e\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\ln(e\cdot x)}{e\cdot x}$ ومنه :

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} g(x)=e\times 0\times 0=0$$

نكتب الدالة بالشكل : $g(x)=e^{-x}\ln(e\cdot x)$

المشتقة : $g'(x)=-e^{-x}\ln(e\cdot x)+\frac{e}{e\cdot x}e^{-x}$

ومنه : $g'(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln(e\cdot x)\right)$

نلاحظ أن : $g'(x)=e^{-x}\cdot f(x)$

وإشارة مشتقة الدالة g تماثل إشارة الدالة f.

تنعدم المشتقة عندما $f(x)=0$ أي عندما $x=1$ حيث $g(1)=\frac{1}{e}$

ننظم جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

من الجدول نجد : $g(]0,+\infty[)=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right]\cup\left]0,\frac{1}{e}\right]\Rightarrow g(]0,+\infty[)=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right]$

3) الدالة F اشتقاقية على $]0,+\infty[$ ومشتقها :

$$F'(x)=-\ln(x)+\frac{1}{x}(1-x)=\frac{1}{x}-1-\ln(x)=\frac{1}{x}-[\ln e+\ln(x)]$$

$$F'(x)=\frac{1}{x}-\ln(e\cdot x)\Rightarrow F'(x)=f(x)$$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$

وفي المجال $[1,e]$ يكون $f(x)\le 0$ (حسب الخط البياني C) وبالتالي المساحة :

$$S=\int_a^b -f(x)\,dx=[-F(x)]_1^e$$

$$S=[(x-1)\ln(x)]_1^e$$

$$S=(e-1)-(0)\Rightarrow S=e-1$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج السابع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

حلول أسئلة النموذج الثامن من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن $M(u,v)$ نقطة من القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ومختلفة عن ذروتيه

أثبت أن معادلة المماس للقطع الزائد في M هي : $\frac{ux}{a^2}-\frac{vy}{b^2}=1$

الحل : باعتبار $y=f(x)$ نشتق طرفي معادلة القطع بالنسبة لـ x :

فنجد : $\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$

ومنه الميل : $m=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{v}$ (أو نكتب هذا الميل مباشرةً حسب خواص المماس)

معادلة المماس للقطع في M : $y-v=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{v}(x-u)$

نضرب الطرفين بـ $\frac{v}{b^2}\neq 0$: $\frac{vy}{b^2}-\frac{v^2}{b^2}=\frac{ux}{a^2}-\frac{u^2}{a^2}$

فنجد : $\frac{ux}{a^2}-\frac{vy}{b^2}=\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}$ ...(1)

وبما أن M تنتمي للقطع الزائد فإن : $\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1$

نعوض في (1) فنجد : $\frac{ux}{a^2}-\frac{vy}{b^2}=1$ وهو المطلوب .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (60 للأول – 40 للثاني – 60 للثالث)

a – 1) ابحث عن نهاية الدالة : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ عندما تسعى x إلى الصفر .

الدالة $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ معرفة في جوار محذوف للصفر :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty \quad و \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = 0$$

إذن : $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) \neq \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

وبالتالي نهاية الدالة f غير موجودة عند الصفر

---

b) احسب العدد : $I = \int_e^1 (2x - \ln x)dx$

$u(x) = 2x - \ln x$	$v'(x) = 1$
$u'(x) = 2 - \frac{1}{x}$	$v(x) = x$

$$I = [x(2x - \ln x)]_e^1 - \int_e^1 (2x - 1)dx$$

$$I = \left[2x^2 - x \cdot \ln x\right]_e^1 - \left[x^2 - x\right]_e^1 = \left[x^2 + x - x \cdot \ln x\right]_e^1$$

$$I = (1 + 1 - 0) - \left(e^2 + e - e\right) \Rightarrow I = 2 - e^2$$

2 – اكتب معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1, -2)$ ، وطول قطره الكبير $4\sqrt{2}$ ، والمسافة بين محرقيه 4 ومحوره المحرقي يوازي محور التراتيب . ثم احسب تباعده المركزي .

الحل : المحور المحرقي يوازي محور التراتيب أي : $a < b$

طول القطر الكبير : $2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$

من البعد بين المحرقين : $2c = 4 \Rightarrow c = 2$

وبالتالي : $a^2 = b^2 - c^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow a = 2$

معادلة القطع المطلوب : $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1$

تباعده المركزي : $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3 – يحتوي صندوق على أربعة بطاقات تحمل الأرقام $1,2,3,n$ حيث $n \in N$

نسحب من الصندوق بطاقة واحدة عشوائياً .

فإذا كان احتمال سحب كل بطاقة حسب رقمها يساوي P_1,P_2,P_3,P_n .

بفرض أن P_1,P_2,P_3,P_n بهذا الترتيب أربعة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{8}$

1) احسب كلاً من P_1,P_2,P_3,P_n .

2) ليكن X المتغير العشوائي الدال على رقم البطاقة المسحوبة ، احسب n إذا علمت أن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 4 .

1) بما أن الاحداث تشكل تجزئة لفضاء العينة فإن :

$$P_1+P_2+P_3+P_n=1 \quad ...(1)$$

وبما أن هذه الاحتمالات تمثل متتالية حسابية فإن :

$$P_2=P_1+\frac{1}{8} \;,\; P_3=P_1+\frac{2}{8} \;,\; P_n=P_1+\frac{3}{8} \;...(2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد :
$$4P_1+\frac{1+2+3}{8}=1 \Rightarrow 4P_1=\frac{1}{4}$$

ومنه :
$$P_1=\frac{1}{16} \;,\; P_2=\frac{3}{16} \;,\; P_3=\frac{5}{16} \;,\; P_n=\frac{7}{16}$$

2) من التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4} r_k \cdot f(r_k)=1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{5}{16}+n\times\frac{7}{16}=\frac{22+7n}{16}$$

$$4=\frac{22+7n}{16} \Rightarrow 22+7n=64 \Rightarrow 7n=42 \Rightarrow n=6$$

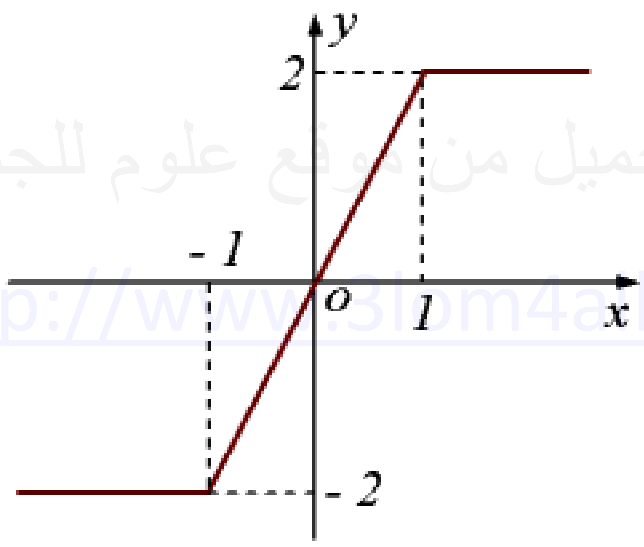
ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (40 للأول – 80 للثاني – 50 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول :

لتكن الدالة $f : R \to R : f(x) = |x+1| - |1-x|$ اكتب الدالة f على هيئة دالة معرفة على مجالات ثم ارسم خطها البياني وبين أن للدالة f قيمة صغرى شاملة و قيمة كبرى شاملة .

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	

$$f(x) = \begin{cases} -x-1-1+x=-2 & : \quad x \in]-\infty, -1] \\ x+1-1+x=2x & : \quad x \in [-1, 1] \\ x+1+1-x=2 & : \quad x \in [1, +\infty[\end{cases}$$



من الخط البياني نستنتج أن :

$f(-1) = -2$ قيمة صغرى شاملة للدالة f .

$f(1) = 2$ قيمة كبرى شاملة للدالة f .

السؤال الثاني :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R وفق : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$

1) أثبت أن الدالة f زوجية واستنتج الصفة التناظرية للخط C .

2) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=-1 , x=1$ دورة كاملة حول $x'x$.

3) احسب طول القوس من الخط C المحدد بالنقطتين $A(0, f(0)) , B(1, f(1))$.

1) الشرط الأول : أياً كان $x \in R$ فإن $-x \in R$ محقق وضوحاً .

الشرط الثاني : أياً كان $x \in R$ فإن : $f(-x) = e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = f(x)$

من تحقق الشرطين نستنتج أن الدالة f دالة زوجية .

إذن الخط البياني C متناظر بالنسبة إلى المحور $y'y$.

2) الحجم :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(e^{x} + e^{-x} + 2 \right) dx = \pi \left[e^{x} - e^{-x} + 2x \right]_{-1}^{1}$$

$$V = \pi \left[\left(e - e^{-1} + 2 \right) - \left(e^{-1} - e - 2 \right) \right] = 2\pi \frac{e^2 + 2e - 1}{e}$$

ملاحظة : يمكن الحساب بالاعتماد على التناظر بالنسبة لمحور التراتيب

3) طول القوس : $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$

الدلة f مستمرة واشتقاقية على R ومشتقها : $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$

وبالتالي : $[f'(x)]^2 = \frac{1}{4} \left(e^{x} + e^{-x} - 2 \right)$

إذن : $1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(e^{x} + e^{-x} - 2 \right) = \frac{1}{4} \left(e^{x} + e^{-x} + 2 \right)$

أي : $1 + [f'(x)]^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)^2$

وبالتالي : $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)$

نعوض في طول القوس :

$$L=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=\left[e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$L=\left[e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right]-(1-1)\Rightarrow L=\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}$$

السؤال الثالث :

ليكن المتجهين $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{v}=4\vec{j}-3\vec{k}$ أوجد العبارة التحليلية للمتجه $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ واحسب نسبة مثلثية للزاوية بين المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ثم أوجد معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الذي يمر بالنقطة $A(1,2,0)$ موازياً كلا المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

الحل :

$$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=-5\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{0-4-6}{\sqrt{9}\times\sqrt{25}}=-\frac{10}{3\times 5}=-\frac{2}{3}$$

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي $\mathcal{P}$ فإن :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow -5(x-1)+6(y-2)+8(z)=0$$

إذن معادلة المستوي المطلوب : $-5x+6y+8z-7=0$

السؤال الرابع :

ليكن العددان المركبان $z_1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}\, i \ , \ z_2 = 3 + \sqrt{3}\, i$

1) اكتب كلاً من $z_2 \ , z_1$ بالشكل الأسي .

2) اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي العدد $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\sin\frac{\pi}{12} , \cos\frac{\pi}{12}$

$$1)\, z_1 = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$2)\, z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}(1+i)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$z = \frac{\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1}{3+1} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i \ \ldots(1)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{2\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{6}i}} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{12}i} \quad \ldots(2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$$

$$e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

إذن : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R \setminus \{-1\}$ وفق : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1}$

1) أثبت أن f تكتب بالشكل $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$: a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2) أوجد كل مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ ثم ادرس وضع C بالنسبة لكل مقارب وجدته .

3) أثبت أن المستقيم $\Delta : y = x - 2$ مقارب للخط C ، ثم ادرس وضع الخط C بالنسبة إلى Δ .

4) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، وبين ما للدالة f من قيم كبرى أو صغرى محلياً .

ثم أوجد $f(R \setminus \{-1\})$.

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 8$ و $x = 2$.

1) نجري عملية القسمة المطولة :

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \quad \leftarrow \text{ناتج القسمة} \\ \hline x+1 & x^2 - x + 2 \\ & \mp x^2 \mp x \\ \hline & -2x + 2 \\ & \pm 2x \pm 2 \\ \hline \text{باقي القسمة} \rightarrow & 4 \end{array}$$

اصبحت الدالة : $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x+1}$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 4$

طريقة ثانية : $f(x) = \dfrac{x(x+1) - 2(x+1) + 4}{x+1} = x - 2 + \dfrac{4}{x+1}$

2) الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty, -1[\ ,\ ]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب للخط C يوازي $y'y$

ويقع C إلى يسار المقارب . عندما x تسعى إلى -1 من اليسار .

$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب للخط C يوازي $y'y$

ويقع C إلى يمين المقارب . عندما x تسعى إلى -1 من اليمين .

3) دالة الفرق : $f(x) - y_\Delta = \dfrac{4}{x+1}$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - y_\Delta\right] = 0$

و : $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - y_\Delta\right] = 0$

نستنتج أن Δ مستقيم مقارب للخط C عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

إشارة الفرق من إشارة المقام $x+1$ الذي ينعدم عند $x = -1$

في المجال $]-\infty, -1[$ يكون : $f(x) - y_\Delta < 0$ والخط C يقع تحت المقارب Δ .

في المجال $]-1, +\infty[$ يكون : $f(x) - y_\Delta > 0$ والخط C يقع فوق المقارب Δ .

4) الدالة f مستمرة واشتقاقية على كل من المجالين $]-1, +\infty[$, $]-\infty, -1[$

وجدنا : $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

المشتقة : $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$

تنعدم المشتقة عندما : $(x+1)^2 = 4$

ومنه : $x = -3$ ، $x = 1$ ، حيث $f(-3) = -7$ ، $f(1) = 1$

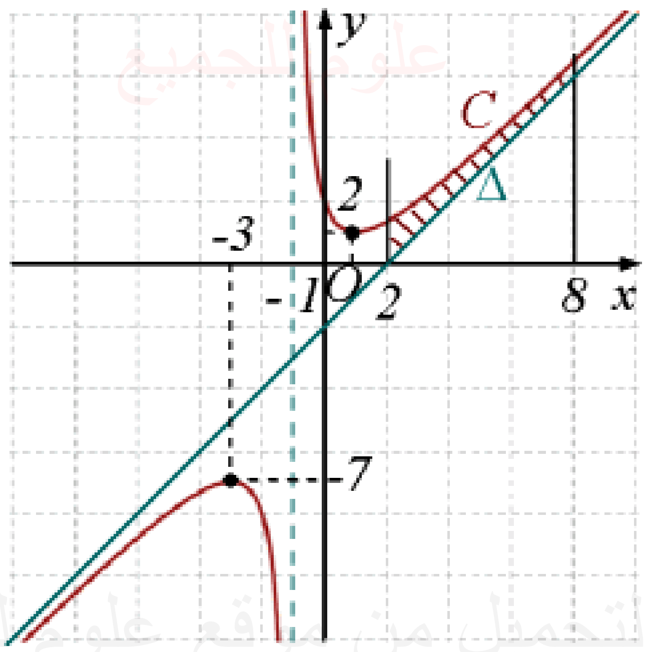
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

للدالة قيمة كبرى محلياً هي : $f(-3)=-7$

وقيمة صغرى محلياً هي : $f(1)=1$

من الجدول نستنتج : $f(R\setminus\{-1\})=]-\infty,-7]\cup[1,+\infty[$

5) الرسم : $(0,2)$ نقطة مساعدة لرسم C



6) في المجال $[2,8]$ يكون C فوق Δ ويكون : $x+1>0$

$$S=\int_a^b\left[f(x)-y_\Delta\right]dx=4\int_2^8\frac{1}{x+1}dx$$

$$S=4\left[\ln(x+1)\right]_2^8=4(\ln 9-\ln 3)=4\ln 3$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج الثامن من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

عين قيم A و B بحيث تكون الدالة f المعرفة فيما يأتي مستمرة على R :

$$f(x)=\begin{cases} A\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|} & : x<1 \\ -1 & : x=1 \\ B\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2} & : x>1 \end{cases}$$

الحل : (الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$)

الدالة f مستمرة على $R\setminus\{1\}$

وعليه الشرط اللازم والكافي لاستمرار f على R هو أن تكون مستمرة عند $x=1$

أي يجب أن يكون : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=f(1)$

لدينا : $f(1)=-1 \quad \ldots(1)$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f_1(x)=A\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$$

$$=-A\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f_1(x)=-A \quad \ldots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $A=1$

$$f_2(x)=B\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}$$

هنا لدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ نغير شكل الدالة : (نضرب البسط والمقام بمرافق البسط)

$$f_2(x)=B\frac{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(x^2+x-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$f_2(x)=B\,\frac{(3x-2)-(2x-1)}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=B\,\frac{x-1}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=B\,\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f_2(x)=B\,\frac{1}{(3)(1+1)}=\frac{B}{6} \quad \ldots(3)$$

من (1) و (3) نستنتج أن : $\frac{B}{6}=-1$ ومنه : $B=-6$

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

a – 1) احسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{1-2x}$

الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{1-2x}$ معرفة في جوار $-\infty$ ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{\infty}{\infty}$

في حالة $x<0$ نكتب : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}=\dfrac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{-x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$

ولأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$ فإن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$

---

b) احسب التكامل : $I=\int \frac{2}{\sin 2x}\,dx$ على المجال $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

$$f(x)=\frac{2}{2\sin x\cdot\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}=\frac{(\tan x)'}{\tan x}$$

$$x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\Rightarrow \tan x<0 : I=\int\frac{(\tan x)'}{\tan x}dx=\ln(-\tan x)+c$$

2 – ليكن المستقيمان L_1 و L_2 اللذين معادلتاهما :

$$L_2:\begin{cases}x=2+s\\ y=1-s\\ z=2s\end{cases};s\in R \quad \text{و} \quad L_1:\begin{cases}x=2\\ y=2-\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in R$$

أثبت أن المستقيمان L_1 و L_2 متخالفان . واوجد نقطة تقاطع المستقيم L_2 مع المستوي xoz .

الحل : $\vec{v}_1(0,-1,1)$ متجه توجيه للمستقيم L_1

$\vec{v}_2(1,-1,2)$ متجه توجيه للمستقيم L_2

وهما متجهان مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستقيمان غير متوازيين .

نحل جملة معادلتاهما حلاً مشتركاً :

$$\begin{cases}2=2+s\Rightarrow s=0 & \dots(1)\\ 2-\lambda=1-s & \dots(2)\\ 1+\lambda=2s & \dots(3)\end{cases}$$

من (1) و (2) نجد : $\lambda=1\,,s=0$ نعوض في (3) : $2=0$

إذن جملة المعادلات متناقضة أي أن المستقيمان لا يتقاطعان ومنه المستقيمان متخالفان .

تقاطع المستقيم L_2 مع المستوي xoz نجعل $y=0$ فنجد $s=1$

ومنه : $x=3$ و $z=2$ ، إذن نقطة التقاطع : $(3,0,2)$

3 – إنطلاقاً من دستور دوموافر أوجد كلاً من $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

حسب دستور دوموافر : $\cos 2\theta+i\sin 2\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

بالنشر : $\cos 2\theta+i\sin 2\theta=\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+i\,(2\cos\theta\cdot\sin\theta)$

من المساواة نستنتج : $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 40 للثاني – 70 للثالث – 90 للرابع)

السؤال الأول :

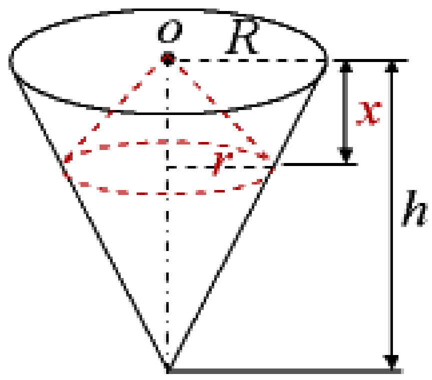
مخروط دوراني قائم طول قطر قاعدته $8\,cm$ ، مركزها o ، وطول ارتفاع المخروط $6\,cm$ نقطعه بمستوٍ متحول يوازي مستوي القاعدة ويبعد عنها مسافة $x\,cm$.

1) احسب بدلالة x حجم المخروط الذي رأسه o وقاعدته المقطع السابق .

2) أوجد قيمة x ليكون حجم هذا المخروط أكبر ما يمكن .

3) إذا تغير x بمعدل $0.9\,cm\backslash s$ فأوجد معدل تغير الحجم السابق عندما تصبح $x = 1\,cm$

1) من تشابه المثلثات : ($r = 4$ و $h = 6$)



$$\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow \frac{r}{4} = \frac{6-x}{6} \Rightarrow r = \frac{2}{3}(6-x)$$

حجم المخروط الذي رأسه o : $V(x) = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot x$

ومنه : $V(x) = \frac{4\pi}{27}(6-x)^2 \cdot x = \frac{4\pi}{27}\left(36x - 12x^2 + x^3\right)$

2) الدالة V مستمرة واشتقاقية على المجال $]0,6[$

المشتقة : $V'(x) = \frac{4\pi}{27}\left(36 - 24x + 3x^2\right) = \frac{4\pi}{9}\left(12 - 8x + x^2\right)$

ومنه : $V'(x) = \frac{4\pi}{9}(6-x)(2-x)$

تنعدم المشتقة في المجال $]0,6[$ عند $x = 2$

وفي المجال $]0,6[$ يكون $6 - x > 0$ وبالتالي إشارة المشتقة من إشارة $2 - x$

ننظم جدول الاطراد :

x	0		2		6
$V'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$V(x)$	‖	$\nearrow$	$V(2)$	$\searrow$	‖

إذن يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن عندما يكون $x = 2\,cm$.

3) لدينا : $\frac{dx}{dt}(t_0)=0.9\ cm \backslash s$ عندما : $x(t_0)=1\ cm$

معدل تغير الحجم : $\frac{dV}{dt}(t)=V'(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)$

ومنه : $\frac{dV}{dt}(t)=\frac{4\pi}{9}\left(12-8x+x^2\right)\frac{dx}{dt}(t)$

نعوض : $\frac{dV}{dt}(t_0)=\frac{4\pi}{9}(5)(0.9)$

ومنه : $\frac{dV}{dt}(t_0)=2\pi\ cm^3 \backslash s$

السؤال الثاني :

اكتب جملة ثلاثة معادلات بمجهولين (x,y) مصفوفتها الموسعة : $H=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 4\\ 1 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{array}\right)$

ثم أوجد مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة H . وبين فيما إذا كان لجملة المعادلات حلول .

$$\begin{cases}x+2y=4\\ x-4y=2\\ 2x+y=4\end{cases}$$

$$H=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 4\\ 1 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-2R_1\longrightarrow R_3]{R_2-R_1\longrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 4\\ 0 & -6 & -2\\ 0 & -3 & -4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_2\longrightarrow R_3}H'=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 4\\ 0 & -6 & -2\\ 0 & 0 & -3\end{array}\right)$$

نلاحظ أن جملة المعادلات المكافئة تحوي جملة متناقضة و هي $0=-3$ فالجملة مستحيلة الحل

<u>السؤال الثالث</u> : يحوي مغلف سبع بطاقات متماثلة ومرقمة بالأعداد : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

1) نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات معاً فإذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي ، ما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 بينها .

2) نسحب عشوائياً من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة ونعرف متغيراً عشوائياً X الذي يدل على الرقم الأكبر بين رقمي البطاقتين المسحوبتين .

اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X وجدول توزيعه ثم احسب توقعه الرياضي .

1) بفرض الحدث A ظهور البطاقة ذات الرقم 2 .

الحدث الذي وقع B مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي

(فردية وزوجيتان أو الثلاثة فردية)

$$P(B)=\frac{C(4,1)\times C(3,2)}{C(7,3)}+\frac{C(4,3)}{C(7,3)}=\frac{12}{35}+\frac{4}{35}=\frac{16}{35}$$

$$P(A\cap B)=\frac{C(1,1)\times C(2,1)\times C(4,1)}{C(7,3)}=\frac{8}{35}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{8}{35}\times\frac{35}{16}\Rightarrow P_B(A)=\frac{1}{2}$$

2) مجموعة قيم المتغير العشوائي : $X(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7\}$

يقع الحدث $\{X=r\}$

إذا كان رقم البطاقة الأولى يساوي r ورقم البطاقة الثانية من بين $\{1,2,\dots,r-1\}$

أو إذا كان رقم البطاقة الأولى من بين $\{1,2,\dots,r-1\}$ ورقم البطاقة الثانية r .

إذن : $f(r)=P(X=r)=\frac{2(r-1)}{7\times 6}=\frac{r-1}{21}$

جدول القانون الاحتمالي :

r	2	3	4	5	6	7
$f(r)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

(يمكن الاعتماد على جدول توضيحي) كالآتي :

	1	2	3	4	5	6	7
1		2	3	4	5	6	7
2	2		3	4	5	6	7
3	3	3		4	5	6	7
4	4	4	4		5	6	7
5	5	5	5	5		6	7
6	6	6	6	6	6		7
7	7	7	7	7	7	7	

التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{r=2}^{7} r\cdot f(r)=\frac{1}{21}(2+6+12+20+30+42)=\frac{112}{21}\Rightarrow E(X)=\frac{16}{3}$$

<u>السؤال الرابع</u> : أوجد معادلة القطع الزائد في كل حالة من الحالتين الآتيتن :

1) مركزه $O'(0,1)$ ويمر بالنقطتين $M_1(4\sqrt{2},-2)$ و $M_2\left(\sqrt{5},-\frac{1}{2}\right)$

<u>طريقة أولى</u> : بمعرفة مركزه يمكن كتابة معادلته بالشكل :

$m^2(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=h$ حيث : $m\cdot h\neq 0$

إذن : $m^2x^2-(y-1)^2=h$

نعوض احداثيي M_1 : $\dots(1)$ $32m^2-9=h$

نعوض احداثيي M_2 : $\dots(2)$ $5m^2-\frac{9}{4}=h$

بطرح (2) من (1) : $27m^2+\frac{-36+9}{4}=0$ ومنه : $m^2=\frac{1}{4}$

نعوض في (2) : $\frac{5}{4}-\frac{9}{4}=h$ ومنه : $h=-1$

معادلة القطع : $\frac{1}{4}x^2-(y-1)^2=-1$ ومنه : $(y-1)^2-\frac{x^2}{4}=1$

طريقة ثانية : معادلة القطع الزائد في حالتين :

إما : $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$ أو : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

إما : $\frac{(y-1)^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ أو : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$

لنأخذ الأولى (ويمكن أخذ الثانية)

نعوض احداثيي M_1 : $(1)\ldots$ $\frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$

نعوض احداثيي M_2 : $(2)\ldots$ $\frac{5}{a^2}-\frac{9}{4b^2}=1$

نضرب الثانية بـ -4 ونجمع مع الأولى : $\frac{32}{a^2}-\frac{20}{a^2}=-3$

ومنه : $\frac{12}{a^2}=-3$ متناقضة

إذن معادلة القطع هي الثانية أي : $\frac{(y-1)^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

نعوض احداثيي M_1 : $(3)\ldots$ $\frac{9}{b^2}-\frac{32}{a^2}=1$

نعوض احداثيي M_2 : $(4)\ldots$ $\frac{9}{4b^2}-\frac{5}{a^2}=1$

نضرب الرابعة بـ -4 ونجمع مع الثالثة : $\frac{20}{a^2}-\frac{32}{a^2}=-3$ ومنه : $-\frac{12}{a^2}=-3$

وبالتالي : $a^2=4$ نعوض في (3) : $\frac{9}{b^2}-\frac{32}{4}=1$ ومنه : $b^2=1$

أخيراً نحصل على معادلة القطع : $(y-1)^2-\frac{x^2}{4}=1$

2) مركزه يقع على محور الفواصل ومعادلة أحد مقاربيه $y=-2x+4$ ويمر بالنقطة $\left(-\frac{1}{2},3\right)$

لدينا : $y_0=0$ والمقارب يمر من مركز القطع

وبالتالي : $0=-2x_0+4$ ومنه : $x_0=2$

إذن مركز القطع : $O'(2,0)$

ميل المقارب : $m=-2$ وبالتالي : $-\frac{b}{a}=-2$ ومنه : $b=2a$

طريقة أولى : بمعرفة مركزه وميل مقاربه يمكن كتابة معادلته بالشكل :

$m^2(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=h$ حيث : $m\cdot h\neq 0$

إذن : $4(x-2)^2-y^2=h$

نعوض احداثيي النقطة التي يمر منها : $4\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2-9=h$ ومنه : $h=16$

معادلة القطع : $4(x-2)^2-y^2=16$ ومنه : $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

طريقة ثانية : معادلة القطع الزائد في حالتين :

إما : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ أو : $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$

إما : $\frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$ أو : $\frac{y^2}{4a^2}-\frac{(x-2)^2}{a^2}=1$

نأخذ الأولى ونعوض احداثيي النقطة : $\frac{25}{4a^2}-\frac{9}{4a^2}=1\Rightarrow\frac{4}{a^2}=1$

إذن : $a=2$ وبالتالي معادلة القطع : $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

ملاحظة : يمكن ايجاد معادلة المقارب الآخر ورسم المقاربين وتمثيل النقطة وحسب وضعها بالنسبة للمقاربين يتم معرفة المحور المحرقي للقطع فيتم اختيار المعادلة المناسبة

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

ليكن C_1 الخط البياني للدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln(x+1)$

وليكن C_2 الخط البياني للدالة g المعرفة على $R\setminus\{-1\}$ وفق : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1) أثبت أنه مهما كانت x من $]-1,+\infty[$ فإن : $f(x)\le x$

2) أثبت أن C_1 و C_2 متماسان في المبدأ $O(0,0)$ ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما في O .

3) ادرس الوضع النسبي للخطين C_1 و C_2 على المجال $]0,+\infty[$.

4) ادرس تغيرات الدالة g ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C_2 يوازي $x'x$ أو $y'y$.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات للخط C_2 وارسم C_2 . ثم احسب حجم المجسم المتولد من دوران المنطقة المحددة بالخط C_2 والمحور $x'x$ والمستقيم $x=2$ دورة كاملة حول محور $x'x$.

1) لدينا $\ln(x+1)-x\le 0$ ، نلاحظ أن المتراجحة تكافئ $h(x)\le 0$

حيث h هي الدالة المعرفة على $]-1,+\infty[$ وفق : $h(x)=\ln(x+1)-x$

وهي دالة مستمرة واشتقاقية على $]-1,+\infty[$

ومشتقها : $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$

المقام موجب تماماً على المجال $]-1,+\infty[$ وبالتالي إشارة المشتقة من إشارة البسط x

وتنعدم المشتقة عند $x=0$ وبالتالي $h(0)=0$ ، ننظم جدول الاطراد :

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	‖ $+$	0	$-$
$h(x)$	‖ $\nearrow$	0	$\searrow$

نلاحظ أنه مهما كانت $x>-1$ فإن : $h(x)\le 0$ وبالتالي $f(x)\le x$ محققة .

2) الدالة f اشتقاقية على المجال $]-1,+\infty[$

الدالة g اشتقاقية على كل من المجالين $]-\infty,-1[\,,\,]-1,+\infty[$

$\{f(0)=0\ ,\ g(0)=0\}\Rightarrow O(0,0)\in C_1\cap C_2 \quad \ldots(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0)=1 \\ g'(x)=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)=g'(0) \quad \dots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : C_1 و C_2 متماسان في المبدأ .

معادلة المماس المشترك لهما : $\Delta: y=x$

3) ندرس إشارة الفرق : $f(x)-g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$

بما أنه لا يمكن الحكم بشكل مباشر على إشارة الفرق نفرض دالة الفرق q وفق :

$$q(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$

وندرس تغيراتها على المجال المفروض $]0,+\infty[$

الدالة q مستمرة و اشتقاقية على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} q(x)=0 \ , \ \lim_{x \to +\infty} q(x)=+\infty$$

المشتقة : $q'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ وبالتالي : $q'(x)>0$

x	0	$+\infty$
$q'(x)$	‖ +	
$q(x)$	‖ 0 ↗	$+\infty$

من الجدول نستنتج أن $q(x)>0$

إذن : $f(x)>g(x)$ على $]0,+\infty[$ وبالتالي C_1 يقع فوق C_2 .

4) الدالة g مستمرة واشتقاقية على كل من المجالين $]-\infty,-1[\ ,\ ]-1,+\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x)=1 \ , \ \lim_{x \to +\infty} g(x)=1$$

المستقيم $y=1$ مقارب للخط C_2 يوازي $x'x$ بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

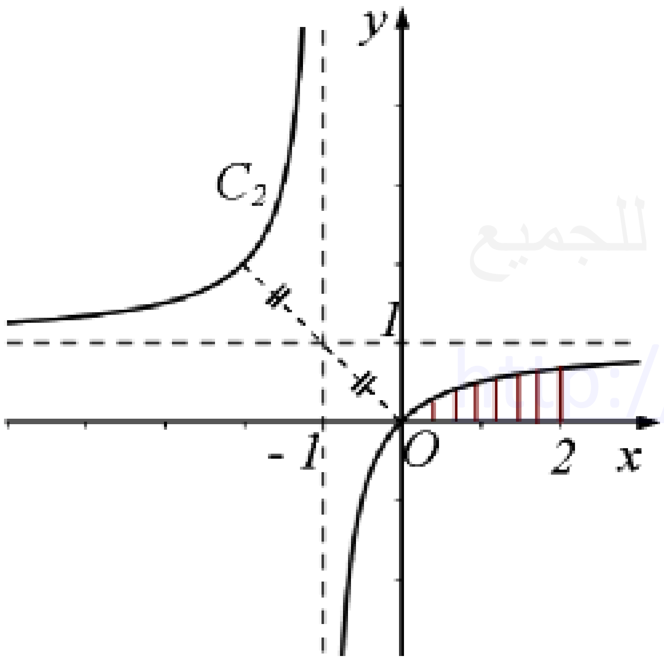
$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = -\infty$$

المستقيم $x=-1$ مقارب للخط C_2 يوازي $y'y$ والخط C_2 يقع إلى جانبي مقاربه .

وجدنا المشتقة : $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ وبالتالي : $g'(x)>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

5) يعطى الحجم بالعلاقة : $V=\pi\int_a^b [g(x)]^2\,dx$



لدينا : $g(x)=\dfrac{x+1-1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$

ومنه :
$$[g(x)]^2=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2$$
$$[g(x)]^2=1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

وفي المجال $[0,2]$ يكون $x+1>0$ وبالتالي الحجم :

$$V=\pi\int_0^2\left[1-\frac{2}{x+1}+(x+1)^{-2}\right]dx$$

$$V=\pi\left[x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^2$$

$$V=\pi\left[\left(2-2\ln 3-\frac{1}{3}\right)-(0-0-1)\right]$$

$$V=\pi\left(\frac{8}{3}-2\ln 3\right)$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج التاسع من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)

المدرس : عبد الحميد السيد

حلول أسئلة النموذج العاشر من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

المدة : ثلاث ساعات الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن السؤال الآتي : (60 درجة)

لتكن الدالة f المعرفة على R وفق : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}$

1) تحقق أن $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$

2) احسب كل من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{f(x)}{x-2}$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{f(x)}{x-2}$. هل f اشتقاقية عند 2 ؟ علل .

1) ننشر :

$$(x+1)(x-2)^2=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)$$
$$=x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4=x^3-3x^2+4$$

طريقة ثانية :

$$x^3-3x^2+4=x^3+x^2-4x^2+4$$
$$=x^2(x+1)-4\left(x^2-1\right)=x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)$$
$$=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=(x+1)(x-2)^2$$

2) في حال $x \neq 2$ نكتب :

$$\frac{f(x)}{x-2}=\frac{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}{x-2}=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-2)^3}} \Rightarrow \frac{f(x)}{x-2}=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}=+\infty$$

بما أن : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ غير موجودة

فالدالة f غير اشتقاقية عند 2 .

ثانياً : حل التمارين الآتية : (50 للأول – 60 للثاني – 40 للثالث)

a – 1) احسب : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{1 - x}$

الدالة $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 - x}$ معرفة في جوار $+\infty$ ولدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{\infty}{\infty}$

في حال $x \neq 0$ نكتب الدالة بالشكل : $f(x) = \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1}$

ولأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

استنتجنا أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

---

b) احسب التكامل : $I = \int x(1-x)^n \, dx \; ; n \in N^*$

$$I = \int -(1 - x - 1)(1-x)^n \, dx$$

$$I = \int \left[-(1-x)^{n+1} + (1-x)^n \right] dx$$

$$\boxed{I = \int \left[(1-x)'(1-x)^{n+1} - (1-x)'(1-x)^n \right] dx}$$

$$I = \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + c$$

طريقة ثانية : التكامل بالتجزئة

$u(x) = x$	$v'(x) = (1-x)^n$
$u'(x) = 1$	$v(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$

$$I = -x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} - \int \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} dx$$

$$I = -x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + c$$

2 – أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم L الذي يتعين بالمعادلتين : $\begin{cases} x-2y+4z-1=0 \\ 3x+y-2z+4=0 \end{cases}$

ثم ادرس الوضع النسبي للمستقيم L والمستقيم المار بالنقطتين $A(1,2,-1)$ و $B(1,0,-2)$

الحل : باختيار $z=t$ نجد المعادلتين : $\begin{cases} x-2y+4t-1=0 \ldots(1) \\ 3x+y-2t+4=0 \ldots(2) \end{cases}$

نضرب الثانية بـ 2 ونجمعها مع الأولى : $7x+7=0 \Rightarrow x=-1$

نعوض في إحدى المعادلتين ولتكن الثانية : $-3+y-2t+4=0$

ومنه : $y=-1+2t$

أخيراً نجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم L :

$$x=-1 \ , \ y=-1+2t \ , \ z=t \ ; \ t\in R$$

إن $\vec{v}(0,2,1)$ متجه توجيه للمستقيم L

و $\overrightarrow{AB}(0,-2,-1)$ متجه توجيه للمستقيم (AB)

نلاحظ أن : $\vec{v}=-\overrightarrow{AB}$ فهما مرتبطان خطياً ومنه المستقيمان L و (AB) متوازيان .

3 – بفرض α عدد حقيقي ، اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية بالشكل الأسي :

$$1)z=-\sin\alpha+i\cos\alpha \quad , \quad 2)z=1+e^{2\alpha i} \ ; \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$3)z=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \ ; \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$1)z=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\Rightarrow z=e^{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)i}$$

$$2)z=\left(e^{-\alpha i}+e^{\alpha i}\right)\cdot e^{\alpha i}\Rightarrow z=2\cos\alpha\cdot e^{\alpha i} \quad ;\cos\alpha>0$$

$$3)z=\frac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{e^{\alpha i}}{e^{-\alpha i}}\Rightarrow z=e^{2\alpha i}$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (70 للأول – 60 للثاني – 90 للثالث – 50 للرابع)

السؤال الأول :

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على R وفق : $f(x)=ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط C ، وادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها .

3) أوجد قيمة تقريبية لميل المماس للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها (0.2) .

1) الفرق : $f(x)-y_{\Delta}=ln\left(1+e^{-x}\right)+x=ln\left(1+e^{-x}\right)+ln\left(e^{x}\right)=ln\left(e^{x}+1\right)$

إن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_{\Delta}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_{\Delta}\right]=+\infty$

نستنتج أن $\Delta: y=-x$ مستقيم مقارب للخط C عند $-\infty$.

نعلم أن : $e^{x}>0$ وبالتالي $e^{x}+1>1$ ومنه : $ln\left(e^{x}+1\right)>0$

إذن : $f(x)-y_{\Delta}>0$ وبالتالي C يقع فوق Δ .

2) الدالة f مستمرة واشتقاقية على $R=]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=ln1=0$

المشتقة : $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\dfrac{1}{e^{x}+1}\Rightarrow f'(x)<0$ والدالة متناقصة تماماً .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

3) دالة ميل المماس : $g(x)=-\dfrac{1}{e^{x}+1}$ وهي مستمرة واشتقاقية على $R=]-\infty,+\infty[$

ومشتقها : $g'(x)=\dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$

نكتب عبارة التقريب الخطي : $g(a+h) \approx g(a) + g'(a) \cdot h$

ونلاحظ أن 0.2 قريب جداً من 0 لذا نعتبر $a = 0$ و $h = 0.2$

فيكون : $g(a) = g(0) = -\frac{1}{2} = -0.5$ و $g'(a) = g'(0) = \frac{1}{4} = 0.25$

نعوض فنجد : $g(0.2) \approx -0.5 + 0.25 \times 0.2 \Rightarrow g(0.2) \approx -0.45$

السؤال الثاني :

أثبت بطريقة غاوس أن لجملة المعادلات الآتية عدداً غير منتهٍ من الحلول ثم أوجد تلك الحلول

$$2x - 2y + 3z = 4 \quad , \quad x + y + z = 5 \quad , \quad 3x - y + 4z = 9$$

الحل : نرتب المعادلات على النحو الآتي :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 2x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x - y + 4z &= 9 \end{aligned}$$

نكتب المصفوفة الموسعة H : $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 9 \end{array}\right)$

نجري التحويل : $R_2 - 2R_1 \longrightarrow R_2$ ثم التحويل $R_3 - 3R_1 \longrightarrow R_3$:

$$H' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

نجري التحويل $R_3 - R_2 \longrightarrow R_3$: $H' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

بما أن : $r = r' < n$ فاللجملة عدد غير منتهٍ من الحلول .

وتؤول الجملة للمعادلتين : $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ -4y + z &= -6 \end{aligned}$ ومنه : $z = 4y - 6$ و $x = -5y + 11$

فمجموعة الحلول هي : $S = \left\{ (-5y + 11, y, 4y - 6) \in R^3 : y \in R \right\}$

السؤال الثالث :

ليكن القطع المكافئ ($\mathcal{P}$) الذي معادلته : $y^2 = 4(x+y-1)$

1) اكتب معادلة $\mathcal{P}$ بالصيغة القياسية ثم عين ذروته وبين أنه يمس محور التراتيب بذروته .

2) اكتب معادلة محور تناظر القطع وعين جهة فتحة القطع ومحرقه ومعادلة دليله .

3) أوجد إحداثيي النقطتين A و B طرفي الوتر المحرقي الأساسي للقطع $\mathcal{P}$ ، برهن أن المماسين للقطع في تلك النقطتين متعامدين واكتب معادلتيهما وبين أنهما يتقاطعان بنقطة هي نقطة تقاطع محور تناظر القطع مع دليله . ثم ارسم القطع ومماسيه ودليله .

1) نبسط : $y^2 - 4y + 4 = 4x \Rightarrow (y-2)^2 = 4x$

المعادلة من الصيغة القياسية : $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$

ذروة القطع : $V(0,2)$

بما أن محور تناظر القطع يوازي محور الفواصل والذروة تقع على محور التراتيب

فإن القطع يمس محور التراتيب بذروته .

طريقة ثانية : ندرس تقاطع القطع مع محور التراتيب بجعل $x = 0$

والتعوض في معادلة القطع : $(y-2)^2 = 0$ ولهذه المعادلة جذر مضاعف هو $y = 2$

وبالتالي القطع يمس محور التراتيب بالذروة $V(0,2)$

2) محور تناظر القطع يوازي محور الفواصل معادلته : $y = 2$

- جهة فتحة القطع : من جهة الفواصل الموجبة . لأن $p = 1 > 0$

- محرق القطع : $F(x_0 + p, y_0) \Rightarrow F(1,2)$

- معادلة دليل القطع : $\Delta : x = x_0 - p \Rightarrow \Delta : x = -1$

3) بما أن محور تناظر القطع يوازي محور الفواصل والوتر المحرقي الأساسي عمودي على محورتناظر القطع فإن الوتر المحرقي الأساسي يوازي محور التراتيب ويمر بالمحرق وبالتالي :

النقطة الأولى : $A(x_F, y_F - 2p) \Rightarrow A(1,0)$

النقطة الثانية : $B\left(x_F, y_F + 2p\right) \Rightarrow B(1,4)$

ـ نشتق معادلة القطع بالنسبة لـ x باعتبار $y = f(x)$:

$$2(y-2)\cdot y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y-2}$$

في النقطة $A(1,0)$: $m_1 = \frac{2}{0-2} = -1$

ومعادلة المماس في A : $y - 0 = -1(x-1) \Rightarrow d_1 : y = -x + 1$

في النقطة $B(1,4)$: $m_2 = \frac{2}{4-2} = 1$

ومعادلة المماس في B : $y - 4 = 1(x-1) \Rightarrow d_2 : y = x + 3$

ـ نلاحظ : $m_1 \cdot m_2 = -1$ وبالتالي المماسين متعامدين .

ـ معادلة دليل القطع : $\Delta : x = -1$

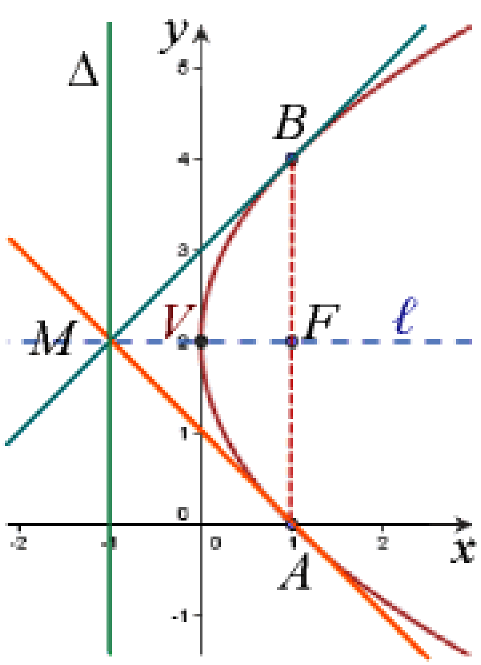
ومعادلة محور تناظر القطع : $\ell : y = 2$

نقطة تقاطعهما : $M(-1,2)$

نحصل على نقطة تقاطع المماسين بحل جملة معادلتيهما حلاً مشتركاً :

$$x + 3 = -x + 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

وبالتالي نقطة تقاطعهما $M(-1,2)$ وهو المطلوب .



السؤال الرابع :

ثلاثة صناديق متشابهة يحتوي الأول على 10 كرات ، 6 منها بيضاء والباقي من اللون الأسود ويحتوي الثاني على 5 كرات ، 4 منها بيضاء والباقي من اللون الأسود ، ويحتوي الثالث على 5 كرات اثنتان منها بيضاء والباقي من اللون الأسود .

اختير صندوق من الصناديق الثلاثة بشكل عشوائي وسحبت منه كرة واحدة :

1) احسب احتمال سحب كرة سوداء .

2) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول .

الحل : بفرض A حدث اختيار الصندوق الأول

B حدث اختيار الصندوق الثاني

C حدث اختيار الصندوق الثالث

D حدث سحب كرة سوداء وبالتالي D' حدث سحب كرة بيضاء .

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$$

$$P_A(D)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\ ,\ P_B(D)=\frac{1}{5}\ ,\ P_C(D)=\frac{3}{5}$$

$$1)\ P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$

$$P(D)=P(A)\cdot P_A(D)+P(B)\cdot P_B(D)+P(C)\cdot P_C(D)$$

$$P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$2)\ P(A\cap D')=P(A)\cdot P_A(D')=\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(D')=1-P(D)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$P_{D'}(A)=\frac{P(A\cap D')}{P(D')}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{3}\Rightarrow P_{D'}(A)=\frac{1}{3}$$

رابعاً : حل المسألة الآتية : (120 درجات)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $R\setminus\{-2,2\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-4}{4-x^2}$

1) إذا علمت أن f تكتب بالشكل $f(x)=A+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{D}{x+2}$ فاحسب A و B و D .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، واستنتج كل مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ أو يوازي $x'x$. ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع مقاربه الموازي للمحور $x'x$.

3) اكتب معادلة المماس d للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

4) اوجد فواصل نقط تقاطع الخط C مع المحور $x'x$.

5) ارسم كل مقارب وجدته وارسم المماس d ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين : $x=1$, $x=-1$.

1) نختزل ضمن مجموعة التعريف : $f(x)=\dfrac{(x^2-4)-2x}{-(x^2-4)}=-1+\dfrac{2x}{x^2-4}$

نفرق الكسر : $\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{2x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{D}{x+2}$

نضرب بـ $x-2$ ونجعل $x\to 2$ فنجد : $\dfrac{4}{2+2}=B$ ومنه : $B=1$

نضرب بـ $x+2$ ونجعل $x\to -2$ فنجد : $\dfrac{-4}{-2-2}=D$ ومنه : $D=1$

إذن : $f(x)=-1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$

وبالتالي : $A=-1$ و $B=D=1$

2) الدالة f مستمرة واشتقاقية على كل مجال من المجالات $]2,+\infty[\,,\,]-2,2[\,,\,]-\infty,-2[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$$

المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مقارب للخط C يوازي $x'x$ بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = -2$ مقارب للخط C يوازي $y'y$ و C يقع على جانبيه .

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 2$ مقارب للخط C يوازي $y'y$ و C يقع على جانبيه .

نشتق الدالة : $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$

المشتقة : $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$

إذن : $f'(x) = -\left(\dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}\right) \Rightarrow f'(x) < 0$ والدالة متناقصة تماماً

ننظم جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

دراسة وضع الخط C بالنسبة إلى المقارب $\Delta : y = -1$

دالة الفرق : $f(x) - y_{\Delta} = -1 + \dfrac{2x}{x^2-4} + 1 = \dfrac{2x}{x^2-4}$

تنعدم عند $x = 0$ وبالاستعانة بجدول تغيرات الدالة نجد الجدول الآتي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta}$	0		$-\infty$ ‖ $+\infty$		0		$-\infty$ ‖ $+\infty$		0
الوضع النسبي		C تحت Δ	‖	C فوق Δ		C تحت Δ	‖	C فوق Δ	

* ملاحظة : يمكن دراسة إشارة البسط وإشارة المقام لإستنتاج إشارة الكسر وتلخيص ذلك بجدول

3) لدينا $f(0)=-1$ ومنه نقطة التماس $M(0,-1)$

ميل المماس : $m=f'(0)=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

معادلة المماس d : $y+1=-\frac{1}{2}(x-0)$

أي : $x+2y+2=0$

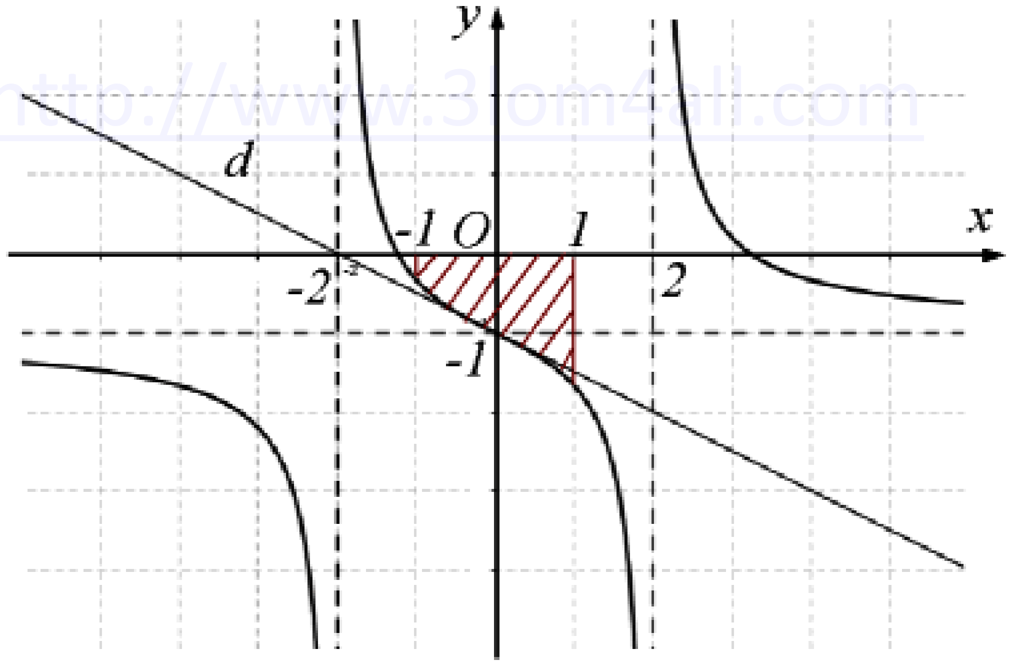
4) التقاطع مع $x'x$: نجعل $f(x)=0$

أي : $x^2-2x-4=0$ ومنه : $(x-1)^2-5=0$

وبالتالي : $(x-1)^2=5$

إما : $x_1=1-\sqrt{5}$ أو : $x_2=1+\sqrt{5}$

5) الرسم :



6) في المجال $[-1,1]$ يكون C تحت $x'x$ ويكون : $x^2-4<0$

$$S=\int_a^b -f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{2x}{x^2-4}\right)dx$$

$$S=\left[x-\ln\left(4-x^2\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$S=[1-\ln(3)]-[-1-\ln(3)]\Rightarrow S=2$$

(انتهت حلول أسئلة النموذج العاشر من اختبارات الرياضيات للثالث الثانوي العلمي)