

أسئلة وأجوبتها

(O; I, J) معلم متعامد ومتجانس للمستوي حاملًا محوريه $(x'x)$ ، $(y'y)$.
 f دالة عددية معرفة على مجال I حيث: $I =]c, +\infty[$ و (C) تمثيلها البياني.
 (Δ) مستقيم معرف بالمعادلة $y = \alpha x + \beta$ مع: α ، β عدنان حقيقيان.

قابلية اشتقاق دالة

سؤال 1: بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق في القيمة a
 الإجابة: نبين أن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ أو: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h}$ حقيقية

سؤال 2: بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I
 الإجابة: نستعمل قابلية اشتقاق الدوال المرجعية على المجال I والعمليات على الدوال المشتقة.

اتجاه التغير

سؤال 3: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
 بين أن الدالة f متزايدة تمامًا على المجال I
 إجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I: $f'(x) > 0$.

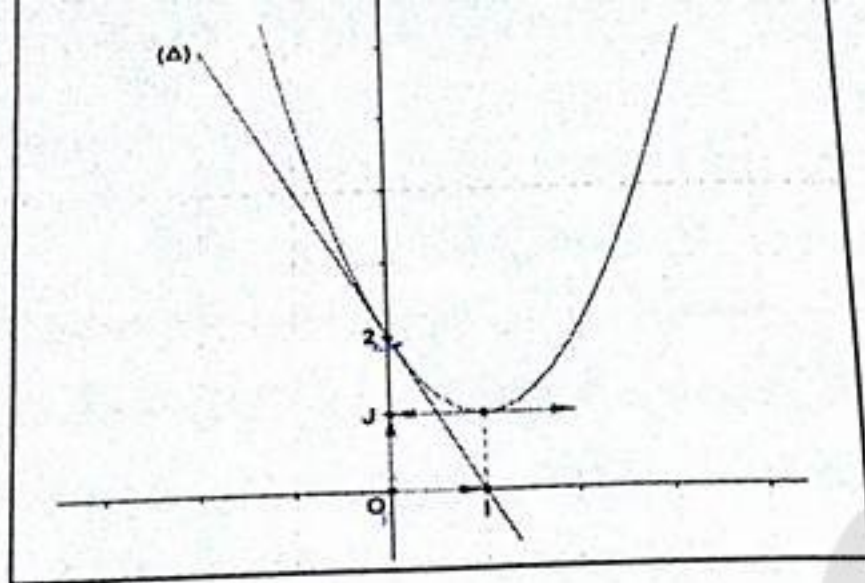
سؤال 4: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
 بين أن الدالة f متناقصة تمامًا على المجال I
 إجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I: $f'(x) < 0$.

سؤال 5: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
 بين أن الدالة f ثابتة على المجال I
 إجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I: $f'(x) = 0$.

سؤال 6: أدرس اتجاه تغير الدالة f

الإجابة: نحسب $f'(x)$ ثم نشكل جدول إشارتها على المجال I ونستنتج اتجاه التغير

سؤال 7: التمثيل البياني التالي لدالة عددية f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، (Δ) مماس
 منحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.



بقراءة بيانية حدد:

(1) قيمة كل من العددين $f'(0)$ ، $f'(1)$.

(2) إشارة $f'(x)$

الإجابة: (1) معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة:

• ذات الفاصلة 1 هي $y = 1$ ومنه: $f'(1) = 0$

• ذات الفاصلة 0 هي $y = -2x + 2$ ومنه: $f'(0) = -2$

(2) بقراءة بيانية الدالة f

• متناقصة على المجال $]-\infty, 1]$ ومنه: $f'(x) \leq 0$ على هذا المجال

• متزايدة على المجال $[1, +\infty[$ ومنه: $f'(x) \geq 0$ على هذا المجال

سؤال 8: بين أن الدالة f مستمرة عند القيمة a

الإجابة: نبين أن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

سؤال 9: f دالة قابلة للاشتقاق في القيمة a .

احسب $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ثم أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.

الإجابة: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

منحنى الدالة f يقبل في النقطة ذات الفاصلة a مماساً ميله $f'(a)$.

سؤال 10: بين أن الدالة f مستمرة على المجال I

الإجابة: نستعمل استمرار الدوال المرجعية على المجال I والعمليات على الدوال المستمرة.

• $f''(x_0) = 0$ و $f''(x)$ تغير إشارتها بجوار x_0

فإن: النقطة التي فاصلتها x_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C)

• A مركز تناظر للمنحنى (C) و A تنتمي إلى المنحنى (C)

فإن: النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى (C)

تفكير دالة

سؤال 48: فكك الدالة h المعرفة على المجال I بالشكل: $h(x) = f(ax + b)$

الإجابة: لدينا: $h(x) = f(x) \circ (ax + b)$ ومنه:

الدالة h مركب من الدالة التآلفية u حيث $u(x) = ax + b$ والدالة f بهذا الترتيب.

سؤال 49: فكك الدالة h المعرفة على المجال I حيث: $h(x) = f^n(x)$

الإجابة: لدينا: $h(x) = x^n \circ f$

ومنه: الدالة h مركب من الدالة f والدالة v حيث $v(x) = x^n$ بهذا الترتيب.

الدوال الأصلية لدالة

سؤال 50: بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I

الإجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $F'(x) = f(x)$

سؤال 51: بين أن F ، H دالتان أصليتان للدالة f على المجال I

الإجابة: نبين أن الفرق $F(x) - H(x)$ ثابت من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I

سؤال 52: f دالة مستمرة على مجال I و a عنصر من المجال I .

حدد F الدالة الأصلية للدالة f على المجال I التي تنعدم من أجل القيمة a للمتغير

الإجابة: الدالة F معرفة على المجال I بالشكل: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

سؤال 53: u ، v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I ، نفرض u' ، v' مستمرتان على

هذا المجال و a ، b عددان حقيقيان من المجال I .

استعمل المكاملة بالتجزئة لتحسب $k = \int_a^b u(t) \times v'(t) dt$

الإجابة: $k = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t) dt$

حساب المساحات

سؤال 54: أحسب S مساحة الحيز تحت المنحنى (C) بين العددين a ، b

الإجابة: نفرض $a < b$ ، ونفرض F دالة أصلية للدالة f فيكون:

$S = \int_a^b f(x) dx$ ومنه: $S = [F(x)]_a^b$ إذن: $S = [F(b) - F(a)]$

سؤال 40: m وسيط حقيقي.

ادرس بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + b$

الإجابة: الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم المعروف بالمعادلة $y = mx + b$.

رسم منحنيات انطلاقا من منحنى (C) ممثل لدالة f

سؤال 41: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x) = |f(x)|$

الإجابة: إذا كان المنحنى (C) :

- فوق محور الفواصل أي: $f(x) \geq 0$ فإن: (C_h) ينطبق على المنحنى (C) .
- تحت محور الفواصل أي: $f(x) \leq 0$ فإن: (C_h) هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل.

سؤال 42: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x) = f(|x|)$

الإجابة: • إذا كان: $x \geq 0$ فإن: (C_h) ينطبق على المنحنى (C) .

• إذا كان: $x \leq 0$ فإن: (C_h) هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الترتيب.

سؤال 43: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x) = -f(-x)$

الإجابة: نحصل المنحنى (C_h) انطلاقا من المنحنى (C) بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ O

سؤال 44: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x) = f(-x)$

الإجابة: نحصل على المنحنى (C_h) انطلاقا من المنحنى (C) بالتناظر بالنسبة إلى محور

الترتيب.

سؤال 45: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h المعرفة بالعلاقة:

$$h(x) = f(x+a) + b$$

الإجابة: نحصل على المنحنى (C_h) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a, b)$

نقط الانعطاف

سؤال 46: بين أن النقطة A ذات الفاصلة a نقطة انعطاف للمنحنى (C)

الإجابة: نبين أن مماس المنحنى (C) في النقطة A يخرق المنحنى (C)

سؤال 47: بين أنه توجد نقطة انعطاف للمنحنى (C)

الإجابة: نذكر أنه إذا كان:

$$f'(x_0) = 0 \text{ و } f'(x) \text{ لا تغير إشارتها بجوار } x_0$$

فإن: النقطة التي فاصلتها x_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C)

مماسات منحني

سؤال 11: أكتب معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة a

الإجابة: إذا كانت الدالة f

• قابلة للإشتقاق في a فإن: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

• غير قابلة للإشتقاق في a (مشتق لا نهائي) فإن: $x = a$

سؤال 12: كم عدد مماسات المنحني (C) التي توازي محور الفواصل (x', x) ؟

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول المعادلة $f'(x) = 0$ في المجال I

سؤال 13: كم عدد مماسات المنحني (C) التي توازي المستقيم (Δ) (أو التي ميلها α)؟

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول المعادلة $f'(x) = \alpha$ في المجال I

سؤال 14: كم عدد مماسات المنحني (C) التي تعامد المستقيم (Δ) ؟

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول المعادلة $\alpha \times f'(x) = -1$ في المجال I

سؤال 15: كم عدد مماسات المنحني (C) التي تشمل النقطة $A(x_0, y_0)$ ؟

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول $y_0 = f'(a)(x_0 - a) + f(a)$ في المجال I

سؤال 16: بين أن المستقيم (Δ) يمس المنحني (C) في نقطة A يطلب تحديد فاصلتها.

الإجابة: فاصلة النقطة A هي حل الجملة

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha \\ f(x) - x f'(x) = \beta \end{cases}$$

في المجال I.

عناصر تناظر منحني

سؤال 17: برهن أن الدالة f زوجية

الإجابة: نبين أن:

• المجال I متناظر بالنسبة إلى العدد 0

$$f(-x) = f(x)$$

سؤال 18: برهن أن الدالة f فردية

الإجابة: نبين أن:

• المجال I متناظر بالنسبة إلى العدد 0

$$f(-x) + f(x) = 0$$

سؤال 19: برهن أن الدالة f دورية

الإجابة: نبين أنه يوجد عدد حقيقي p بحيث:

• العدد $x + p$ ينتمي إلى المجال I

$$f(x + p) = f(x)$$

الإجابة: نبين أن:

• الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a, b]$

• العدد λ محصور بين العددين $f(a)$ ، $f(b)$

سؤال 35: لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بالشكل: $f(x) = 2 - x + 2e^{-x}$

α هو حل المعادلة $f(x) = 0$ على المجال $[2.2, 2.3]$

بين أن $f'(\alpha) = 1 - \alpha$ ثم حدد حصراً للعدد $f'(\alpha)$

الإجابة: لدينا: $f(\alpha) = 0$ ومنه: $2e^{-\alpha} = \alpha - 2$

لدينا: $f'(x) = -1 - 2e^{-x}$ ومنه: $f'(\alpha) = -1 - 2e^{-\alpha}$

ومنه: $f'(\alpha) = -1 - (\alpha - 2)$ إذن: $f'(\alpha) = 1 - \alpha$

لدينا: $2.2 < \alpha < 2.3$ ومنه: $-2.3 < -\alpha < -2.2$ إذن: $-1.3 < f'(\alpha) < -1.2$

إشارة عبارة على مجال

سؤال 36: بين أن الدالة f موجبة على المجال $[a, b]$

الإجابة: نطبق إحدى النتيجتين التاليتين:

• $f(a) \geq 0$ و f متزايدة على المجال $[a, b]$

• $f(b) \geq 0$ و f متناقصة على المجال $[a, b]$

سؤال 37: بين أن الدالة f سالبة على المجال $[a, b]$

الإجابة: نطبق إحدى النتيجتين التاليتين:

• $f(b) \leq 0$ و f متزايدة على المجال $[a, b]$

• $f(a) \leq 0$ و f متناقصة على المجال $[a, b]$

الدراسة البيانية للمعادلات من الشكل $f(x) = ax + b$

سؤال 38: أدرس بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$f(x) = m$$

الإجابة: الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم ذو المعادلة $y = m$

سؤال 39: m وسيط حقيقي. أدرس بياناً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = ax + m$

الإجابة: الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم المعروف بالمعادلة $y = ax + m$

سؤال 55: أحسب S مساحة الحيز المحدد بمنحني الدالتين f ، h والمستقيمين المعروفين بالمعادلتين $x = a$ ، $x = b$.

الإجابة: نفرض $a < b$ فيكون: $S = \int_a^b |f(x) - h(x)| dx$

القيمة المتوسطة دالة

سؤال 56: f دالة مستمرة على مجال $[a, b]$.

أحسب m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a, b]$

الإجابة: العدد m يعطى بالعلاقة: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

حساب الحجم

سؤال 57: أحسب V حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران منحنى دالة f حول محور الفواصل دورة كاملة على مجال $[a, b]$.

الإجابة: الحجم V يعطى بالعلاقة: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

المعادلات التفاضلية

سؤال 58: حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية $y' = a y$

الإجابة: الحل هو: $y = k e^{ax}$ مع: k عدد حقيقي

سؤال 59: حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية $y' = a y + b$

الإجابة: الحل هو: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$ مع: k عدد حقيقي

سؤال 60: α عدد حقيقي غير معدوم.

حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية $y'' = -\alpha^2 y$

الإجابة: الحل هو $y = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x$

مع: a ، b عدنان حقيقيان ثابتان.

المستقيمات المقاربة

سؤال 25: فسر بيانيا $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$

الإجابة: المستقيم المعروف بالمعادلة $x = c$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

سؤال 26: فسر بيانيا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta$

الإجابة: المستقيم المعروف بالمعادلة $y = \beta$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

سؤال 27: بين أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

الإجابة: نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$

سؤال 28: فسر بيانيا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta$

الإجابة: المستقيم المعروف بالمعادلة $y = \alpha x + \beta$ مقارب مائل للمنحنى (C)

الأوضاع النسبية

سؤال 29: أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

الإجابة: نشكل جدول إشارة العبارة $f(x) - (\alpha x + \beta)$ ثم نستنتج الوضع النسبي

سؤال 30: حدد أحداثيات نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ)

الإجابة: نبحث عن حلول المعادلة $f(x) = \alpha x + \beta$ في المجال I

سؤال 31: حدد أحداثيات نقاط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل ($x'x$)

الإجابة: نضع: $y = 0$ ولتحديد x نحل في المجال I المعادلة $f(x) = 0$

سؤال 32: حدد أحداثيات نقطة تقاطع المنحنى (C) مع محور الترتيب ($y'y$)

الإجابة: إذا كانت الدالة f معرفة عند القيمة 0

نضع: $x = 0$ فيكون $y = f(0)$ ومنه: أحداثيات نقطة التقاطع هما: $(0, f(0))$.

المعادلات من الشكل $f(x) = \lambda$

سؤال 33: بين أن المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a, b]$

الإجابة: نبين أن:

• الدالة f مستمرة على المجال $[a, b]$

• العدد λ محصور بين العددين $f(a)$ ، $f(b)$

سؤال 34: بين أن المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a, b]$

سؤال 20: A نقطة احداثياها (a, b) في المعلم $(O; I, J)$

اكتب معادلة المنحنى (C) في المعلم $(A; I, J)$

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

الإجابة: نعلم أن دساتير التغير لمعلم هي

$$y' + b = f(x' + a) \text{ ومنه: } y = f(x)$$

سؤال 21: برهن أن النقطة $A(a, b)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

الإجابة: نستعمل إحدى الطريقتين التاليتين

طريقة (1): نبين أن:

• العدد $2a - x$ ينتمي إلى المجال I . (المجال I متناظر بالنسبة للعدد a)

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

طريقة (2):

• نكتب معادلة المنحنى (C) في المعلم $(A; I, J)$

• نبين أن الدالة الناتجة فردية

سؤال 22: برهن أن المستقيم المعرف بالمعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C)

الإجابة: نستعمل إحدى الطريقتين التاليتين

طريقة (1): نبين أن

• العدد $2a - x$ ينتمي إلى المجال I . (المجال I متناظر بالنسبة للعدد a)

$$f(2a - x) = f(x)$$

طريقة (2):

• نكتب معادلة المنحنى (C) في المعلم الذي مبدؤه $A(a, f(a))$

• نبين أن الدالة الناتجة زوجية

سؤال 23: بين أن: $f(a - x) + f(x) = b$ ثم فسر النتيجة بيانيا

الإجابة: النقطة $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

سؤال 24: بين أن: $f(a - x) = f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

الإجابة: $x = \frac{a}{2}$ معادلة محور تناظر للمنحنى (C)