حل تمرين حول الأعداد المركبة

1) حل في C المعادلة:

$$Z^4 - 10Z^3 + 38Z^2 - 90Z + 261 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (E)$$

بما أن المعادلة (E) تقبل حلين تخيليين صرفين فإنه يوجد عددين مركبين من الشكل iy (حيث y عدد حقيقي) يحققان:

$$(iy)^4 - 10(iy)^3 + 38(iy)^2 - 90(iy) + 261 = 0$$

(تذكر أن : $i^2 = -1; i^3 = -i: i^4 = 1$)

$$y^4 + 10iy^3 - 38y^2 - 90iy + 261 = 0$$

بالتبسيط:

$$(y^4 - 38y^2 + 261) + i(10y^3 - 90y) = 0$$

ومنه قيم y هي حل الجملة:

$$\begin{cases} y^4 - 38y^2 + 261 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 10y^3 - 90y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نحل المعادلة السهلة الحل أو التي يمكننا حلها ونأخذ القيم التي تحقق المعادلة الأخرى:

سنختار حل المعادلة (2) لأنها أسهل في الحل.

$$10y^3 - 90y = 0 \Leftrightarrow 10y(y-3)(y+3) = 0$$

ومنه المعادلة (2) تقبل ثلاث حلول هي : 0 ، 3 ، 3-.

الحلان 3 و 3- يحققان المعادلة (1) أما 0 فلا يحققها ومنه $y \in \{-3; 3\}$ أي أن حلي المعادلة (E) التخيليان الصرفان هما: $\{-3i; 3i\}$.

إيجاد بقية الحلول:

$$(E) \Leftrightarrow (z-3i)(z+3i)(az^2 + bz + c) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow (z^2 + 9)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = 0$$

باستعمال القسمة الإقليدية أو النشر والمطابقة نستنتج عبارة كثير الحدود المركب $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ حيث نجد

$$\alpha = 1; \beta = -10; \gamma = 29.$$

وعليه بقية حلول المعادلة (E) هي حلا المعادلة : $z^2 - 10z + 29 = 0$.

$$\Delta = -16 = (4i)^2;\ z_1 = 5 + 2i\ ;\ z_2 = 5 - 2i.$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $\{-3i; 3i; 5 + 2i; 5 - 2i\}$

(2

أ) كتابة الأعداد a، b، c و d على الشكل المثلثي والأسي:

$$a=-2;\ |a|=2;\ \arg(a)=\pi+2\pi k.\quad (k\epsilon Z);\ a=2(\cos(\pi)+i\sin(\pi)=2e^{i(\pi)}.$$

$$p=10;\ |p|=10;\ \arg(p)=2\pi k.\quad (k\epsilon Z);\ p=10(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=10e^{i(2\pi)}.$$

$$b=2-2i\sqrt{3}=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ b=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=4e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

$$c=3+3i\sqrt{3}=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ c=6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=6e^{i(\frac{\pi}{3})}$$

ب) الإنشاء:

بما أن $b=2-2i\sqrt{3}$ و $|b|=4$ فإن صورة العدد b النقطة B تنتمي إلى الدائرة نصف قطرها 4 ومركزها O والتي فاصلتها 2 وفي الربع الرابع من الدائرة (لأن ترتيبها سالب أو لأن عمدة لاحقتها $-\frac{\pi}{3}$).

و بما أن $c=3+3i\sqrt{3}$ و $|c|=6$ فإن صورة العدد c النقطة C تنتمي إلى الدائرة نصف قطرها 6 ومركزها O والتي فاصلتها 3 وفي الربع الأول من الدائرة (لأن ترتيبها موجب أو لأن عمدة لاحقتها تساوي $\frac{\pi}{3}$).

أما النقطتين A و P فتنشأ بشكل عادي. (ملاحظة حسب صيغة السؤال فإنه غير مسموح لك باستعمال القيم التقريبية من أجل الإنشاء).

ت) حساب النسبة $\frac{c-b}{p-b}$ ثم تفسيرها هندسيا واستنتاج طبيعة المثلث BCP

$$\frac{c-b}{p-b}=\frac{(3+3i\sqrt{3})-(2-2i\sqrt{3})}{10-(2-2i\sqrt{3})}=\frac{(1+5i\sqrt{3})}{(8+2i\sqrt{3})}\frac{(8-2i\sqrt{3})}{(8-2i\sqrt{3})}=\frac{38+38i\sqrt{3}}{76}$$

ومنه

$$\frac{c-b}{p-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i(\frac{\pi}{3})}$$

التفسير الهندسي:

$$\begin{cases} BC=BP \\ (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BP})=\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ k\epsilon Z \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن المثلث BPC متقايس الأضلاع.

ث) إيجاد d لاحقة النقطة D منتصف القطعة [BP]

$$d=\frac{b+p}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}i+10}{2}=6-\sqrt{3}i\quad ;\ \mathbf{d=6-\sqrt{3}i}$$

ج) إيجاد g لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث BCP

$$g=\frac{b+c+p}{3}=\frac{2-2\sqrt{3}i+3+3i\sqrt{3}+10}{3}=5+\frac{\sqrt{3}}{3}i;\ \mathbf{g=5+\frac{\sqrt{3}}{3}i}$$

ح) إيجاد q لاحقة النقطة Q صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ والتحقق أن B،O وQ في استقامة واحدة:

$$q-a=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}(c-a);\ q=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}(c-a)+a=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3+3i\sqrt{3}+2)-2$$

$$\mathbf{q=-4+4i\sqrt{3}}$$

التحقق أن B،O وQ في استقامة واحدة:

$$\frac{q}{b}=\frac{-4+4i\sqrt{3}}{2-2i\sqrt{3}}=\frac{-4(1+i\sqrt{3})}{2(1+i\sqrt{3})}=-2\in R$$

ومنه النقط B،O وQ في استقامة واحدة.

خ) إيجاد n لاحقة النقطة N نظيرة C بالنسبة إلى O

$$n=-c=3-3i\sqrt{3}$$

التحقق أن المستقيمات (CN)، (AP) و (BQ) متقاطعة في النقطة O

لدينا B،O وQ في استقامة واحدة أي $O\in(BQ)$ من نتيجة جواب السؤال ح)

و N نظيرة C بالنسبة إلى O أي $O\in(CN)$. لأن N نظيرة C بالنسبة إلى O.

تبقى لنا أن نثبت أن $O\in(AP)$ أي أن نثبت أن النقط P،O وA في استقامة واحدة وذلك بحساب النسبة $\frac{p}{a}$

$$\frac{p}{a}=\frac{10}{-2}=-5\in R$$

*ومنه المستقيمات (CN)، (AP) و (BQ) متقاطعة في النقطة O.

د) إيجاد عناصر وعبارات المركبة للتحويلات النقطية H، R و S

بما أن C صورة D بالتحاكي H الذي مركزه G فإنه يوجد عدد حقيقي α يختلف عن 0 و 1 بحيث :

$$*\ (c-g)=\alpha(d-g)$$

$$\alpha=\frac{c-g}{d-g}=\frac{(3+3i\sqrt{3})-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{(6-i\sqrt{3})-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{-2+i\frac{8\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{4\sqrt{3}}{3}}=-2$$

ومنه H تحاكي مركزه G ونسبته -2

العبارة المركبة لـ H:

$$H:\left(z'-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=-2\left(z-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$H:\ z'=-2z+(15+i\sqrt{3})$$

* بما أن C صورة P و B صورة C بالدوران R فإنه يوجد عددان مركبان α و β مع $|\alpha|=1$ بحيث:

$$*\begin{cases}R(P)=C\\R(C)=B\end{cases};\ \begin{cases}c=\alpha p+\beta\ \dots\dots\dots(1)\\b=\alpha c+\beta\ \dots\dots\dots(2)\end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد

$$\alpha=\frac{c-b}{p-c}=\frac{3+3i\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}}{10-3-3i\sqrt{3}}=\frac{1+5i\sqrt{3}}{7-3i\sqrt{3}}\frac{7+3i\sqrt{3}}{7+3i\sqrt{3}}=\frac{-38+38i\sqrt{3}}{76}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\beta=c-\alpha p=3+3\sqrt{3}i+5-5\sqrt{3}i=8-2\sqrt{3}i$$

لاحقة مركز الدوران R:

$$\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{-8-2\sqrt{3}i}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{16-4\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{60+4i\sqrt{3}}{12}=5+i\frac{\sqrt{3}}{3}=g$$

ومنه R دوران مركزه G وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ وعبارته المركبة: $(R): Z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+8-2\sqrt{3}i$

*بما أن S تشابه مباشر مركزه D ويحول P إلى C فإنه يوجد عدد مركب α طويلته تختلف عن 1 بحيث :

$$(c-d)=\alpha(p-d)$$

$$\alpha=\frac{c-d}{p-d}=\frac{3+3i\sqrt{3}-6+\sqrt{3}i}{10-6+\sqrt{3}i}=\frac{-3+4i\sqrt{3}}{4+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}i\cdot\frac{i\sqrt{3}+4}{4+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}i$$

$$|\alpha|=|\sqrt{3}i|=\sqrt{3};\ Arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه S تشابه مباشر مركزه D ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وعبارته المركبة:

$$S:\left(z'-(6-i\sqrt{3})\right)=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(z-(6-i\sqrt{3})\right)$$

العبارة المركبة لـ S: (نجدها بعد نشر وتبسيط العبارة السابقة) $S: z'=\sqrt{3}iz+3-7\sqrt{3}i$

ذ) إيجاد العبارة المركبة للتحويلات النقطية T_1، T_2 T_3 و T_r و استنتاج طبيعتها وعناصرها المميزة :

*بما أن R و H لهما نفس المركز فإن:

$$T_1: RoH:\ \left(z'-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=-2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\left(z-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

$$\left(z'-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}\left(z-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

العبارة المركبة لـ T_1 $T_1:\left(z'-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}\left(z-\left(5+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

ومنه T_1 تشابه مباشر مركزه G نسبته 2 وزاويته $\frac{5\pi}{3}$

ملاحظة: تركيب التحويلات النقطية المألوفة (التحاكي، الدوران، التشابه المباشر) التي لها نفس المركز هو تحويل نقطي له نفس المركز. وفي هذه الحالة يكون التركيب تبديلي.

$* \ H: z' = -2z + (15 + i\sqrt{3})$ ، $S: z' = \sqrt{3}iz + 3 - 7\sqrt{3}i$

$T_2: SoH: z' = \sqrt{3}i[-2z + (15 + i\sqrt{3})] + 3 - 7\sqrt{3}i$

$z' = -2\sqrt{3}iz + 8\sqrt{3}i$

العبارة المركبة لـ T_2 $\quad z' = 2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}z + 8\sqrt{3}i$

لاحقة مركز T_2:

$$\frac{8\sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i} = \frac{48 + 8\sqrt{3}i}{13} = \frac{18}{13} + i\frac{8\sqrt{3}}{13}$$

ومنه T_2 تشابه مباشر مركزه صورة العدد $\frac{18}{13} + i\frac{8\sqrt{3}}{13}$ ونسبته $2\sqrt{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$T_3: SoR: z' = \sqrt{3}i\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 8 - 2\sqrt{3}i\right] + 3 - 7\sqrt{3}i$

$$z' = \sqrt{3}i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 8\sqrt{3}i + 6 + 3 - 7\sqrt{3}i$$

$$Z' = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}z + 9 + \sqrt{3}i$$

$$Z' = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}z + 9 + \sqrt{3}i$$

العبارة المركبة لـ T_3 $\quad T_3: Z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\right)z + 9 + \sqrt{3}i$

لاحقة مركز T_3: $\delta = \frac{18+2\sqrt{3}i}{(1+\sqrt{3})+3i} = \frac{9+\sqrt{3}i}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}}$ تفاديا للحسابات نسمي مركز T_3 بـ ω و لاحقتها بـ δ

ومنه T_3 تشابه مباشر مركزه ω ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{7\pi}{6}$.

$*S: \left(z' - (6 - i\sqrt{3})\right) = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(z - (6 - i\sqrt{3})\right)$

العبارة المركبة لـ T_r $\quad T_r: \underbrace{SoS \dots S}_{r \text{ مرة}}: \left(z' - (6 - i\sqrt{3})\right) = \sqrt{3}^r e^{i\left(r\frac{\pi}{2}\right)}\left(z - (6 - i\sqrt{3})\right)$

ومنه T_r تشابه مباشر مركزه D ونسبته $\sqrt{3}^r$ وزاويته $\left(r\frac{\pi}{2}\right)$

*إيجاد قيم r حتى يكون T_r تحاكي:

يكون تحاكي من أجل: $r\frac{\pi}{2} = k.\pi$ ومنه $r = 2k$ أي من أجل أن يكون r زوجي

(3

أ) إيجاد عناصر وطبيعة مجموعة النقط:

*E_1 مجموعة النقط M صورة العدد المركب Z التي يكون من أجلها العدد $\frac{iZ-2i}{Z-10}$ حقيقيا غير معدوم أي من أجل أن يكون العدد $\frac{Z+2}{Z-10}$ تخيلي صرف غير معدوم (بالضرب في $-i$ يتحول العدد الحقيقي إلى عدد تخيلي صرف).

العدد $\frac{Z+2}{Z-10}$ تخيلي صرف معناه : $(\overrightarrow{PM};\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k$ أي E_1هي الدائرة التي قطرها [AB] باستثناء النقطتين P وA .

*E_2

$$Z = 5 + i\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{\frac{19}{3}}\,e^{i\theta}; Z - \left(5 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{19}{3}}\,e^{i\theta}; |Z - g| = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$$

ومنه E_2دائرة مركزها G ونصف قطرها $2\sqrt{\frac{19}{3}}$.

*E_3

$$\arg(-\bar{z} - 2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \arg\left(-(\bar{z} + 2)\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \arg(\bar{z} + 2) = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$
$$\arg(\overline{z + 2}) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \arg(z + 2) = -\frac{4\pi}{3}; \arg\left(\frac{z + 2}{1}\right) = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

تذكر: $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

وهذا معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أي E_3 نصف مستقيم مبدؤه ويصنع مع $\vec{u}$ زاوية قدرها $\frac{2\pi}{3}$ باستثناء النقطة A أو نقول هي نصف مستقيم مبدؤه A ويوجه بالشعاع الذي لاحقته $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

*E_4

$$G_\alpha\{(B; 1); (C; \alpha); (P; 1)\}; \alpha \neq -2$$

$$g_\alpha = \frac{b + \alpha c + p}{2 + \alpha} = \frac{2 - i2\sqrt{3} + 3\alpha + i3\alpha\sqrt{3} + 10}{2 + \alpha} = \frac{12 + 3\alpha}{2 + \alpha} + i\sqrt{3}\frac{-2 + 3\alpha}{2 + \alpha}$$

$$\begin{cases} x = \frac{12 + 3\alpha}{2 + \alpha} = \frac{6 + 6 + 3\alpha}{2 + \alpha} = \frac{6}{2 + \alpha} + 3 \\ y = \sqrt{3}\frac{2 + 3\alpha}{2 + \alpha} = \sqrt{3}\frac{-8 + 6 + 3\alpha}{2 + \alpha} = \sqrt{3}\frac{-8}{2 + \alpha} + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3=\dfrac{6}{2+\alpha}\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y-3\sqrt{3}=\sqrt{3}\dfrac{-8}{2+\alpha}\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بقسمة (1) على (2) مع $(x \neq 3$ و $y \neq 3\sqrt{3})$ نجد:

$$\frac{x-3}{y-3\sqrt{3}}=-\frac{3}{4\sqrt{3}};\quad 4\sqrt{3}x-12\sqrt{3}=-3y+9\sqrt{3};\quad 3y+4\sqrt{3}x-21\sqrt{3}=0$$

ومنه E_4 مستقيم معادلته الديكارتية: $3y+4\sqrt{3}x-21\sqrt{3}=0$ باستثناء النقطة C (ملاحظة المستقيم يشمل G وبالتالي: $E_4=(GC)-\{c\}$)

يمكن استعمال خاصية التجميع للمرجح $G_\alpha\{(D;2);(C;\alpha)\}$ واستنتاج أن مجموعة النقط تكون في استقامية مع D و C. $E_4=(DC)-\{c\}$.

*E_5 مجموعة النقط M حيث $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MP})=\frac{\pi}{6}$ هو القوس $\widehat{PB}$ من الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها CB باستثناء النقطتين B و P (الزاوية هي زاوية محيطية للزاوية المركزية $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CP})=\frac{\pi}{3}$ اللذان يحصران نفس القوس $\widehat{BP}$ أي القوس المتمم $\widehat{PB}$).

*E_6

$$(z-2+i2\sqrt{3})(\bar{z}-2-i2\sqrt{3})=16\,;(z-2+i2\sqrt{3})\left(\overline{z-2+i2\sqrt{3}}\right)=16\,;$$

$$(z-b)(\overline{z-b})=16;|z-b|^2=16;\ |z-b|=4$$

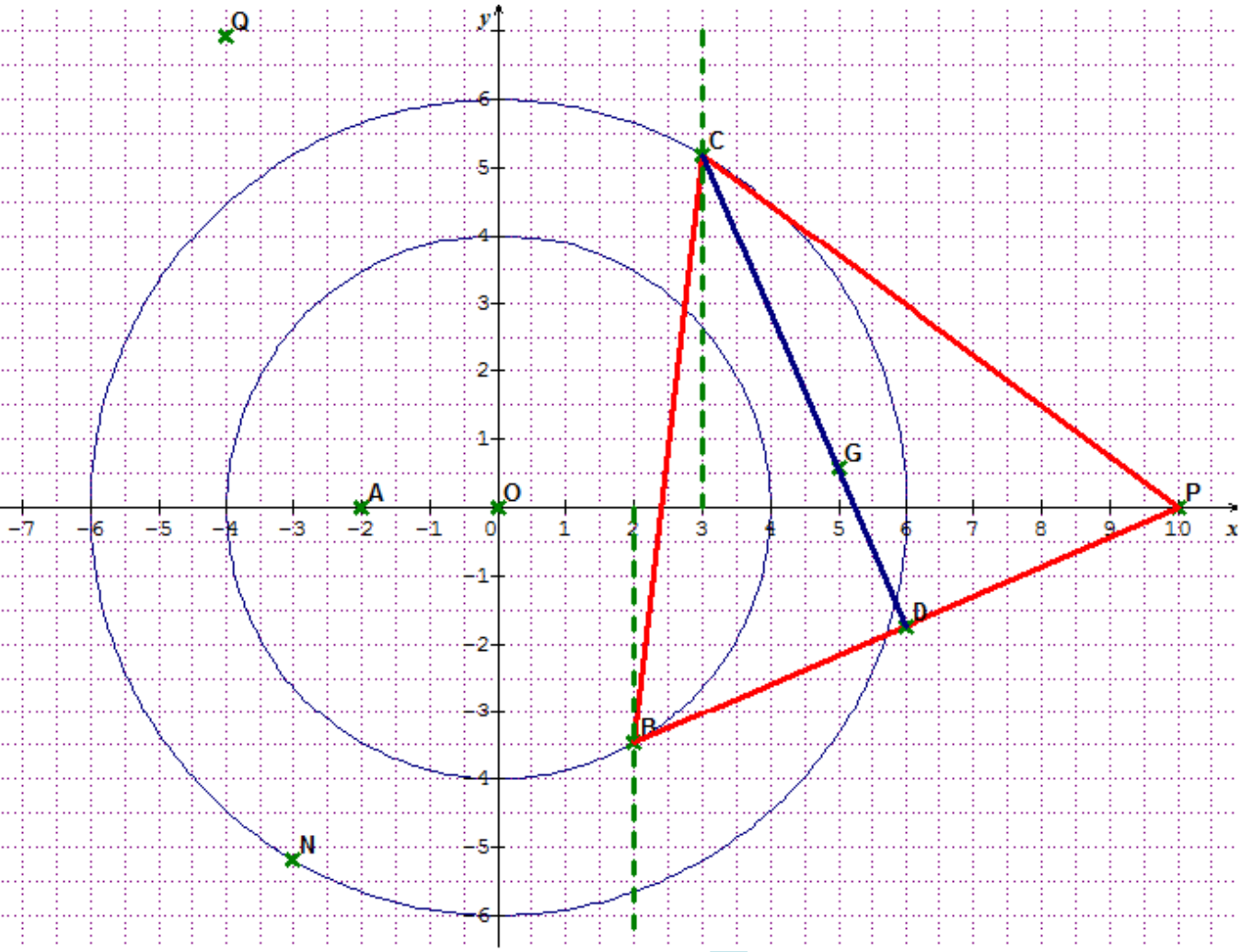
ومنه E_6 دائرة مركزها B ونصف قطرها 4.

ب) نتحقق من إنتماء النقطة B بتعويض لاحقتها في العلاقة الموافقة في مكان Z ونجدها تحقق ونستنتج أن المجموعة هي الدائرة المحيطة بالمثلث BCP. نفس الشيء مع O ونستنتج أن هي الدائرة التي مركزها B وتشمل O.

ت) صورة أي مستقيم بتحاكي يشمل مركز التحاكي هو نفسه ومنه صورة E_4 هو المستقيم نفسه (DC) لكن باستثناء صورة C بالتحاكي H وهي النقطة ذات لاحقة $9-i5\sqrt{3}$

(ملاحظة هناك طرق عديدة لاستنتاج مجموعة النقط لكني اخترت السريعة والتي توظف الأعداد المركبة)

إذا احتوى الحل على خطأ يرجى تنبيهي عليه من أجل تصحيحه


Q
y
C
G
A
O
P
x
D
B
N