الأستاذ محمد الرقبة

الـــــــــدوران

1) تعريف الدوران

① تمهيد :

نشاط ① لتكن O نقطة من المستوى P. ليكن f التطبيق المعرف بـ :

$$f : P \to P$$
$$M \mapsto M'/$$

بحيث $f(O) = O$

وإذا كان $M \neq O$ فإن
$$\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overline{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

ولتكن A و B نقطتين من P تخالف O.
أنشئ صور A و B.

نشاط ② لتكن A و B و C ثلاث نقط بحيث $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \alpha[2\pi]$

وليكن g التطبيق المعرف من P نحو P بـ : $g(A) = A$

ولكل M من P $(M \neq A)$ $g(M) = M'$

بحيث
$$\begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overline{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$

a- أنشئ صورة B ثم صورة C.
b- لتكن E نقطة من P $E \neq A$. أنشئ صورة E.

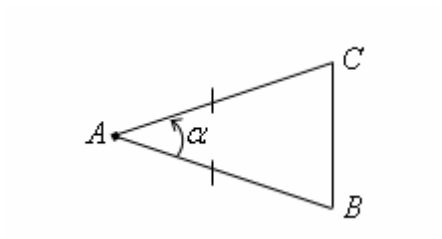
② تعريف : لتكن O نقطة من المستوى P و α عددا حقيقيا.
الدوران الذي مركزه O وزاويته α هو التطبيق من P نحو P والذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' بحيث :
$M' = O$ إذا كانت $M = O$.
وإذا كانت $M \neq O$
$$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overline{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$

ونرمز للدوران الذي مركزه O وزاويته α بالرمز $\Omega(O, \alpha)$.

ونكتب $\Omega(M) = M'$

③ أمثلة :

1-3. المثلث المتساوي الساقين
2-3. المثلث المتساوي الساقين والقائم الزاوية.



3-3. المثلث المتساوي الأضلاع.
4-3. الدوران الذي زاويته منعدمة.
5-3. الدوران الذي زاويته مستقيمية.
6-3. الدوران العكسي.

④ **تطبيق :** ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع بحيث : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

a) حدد زاوية الدوران r الذي مركزه A ويحول B إلى C.

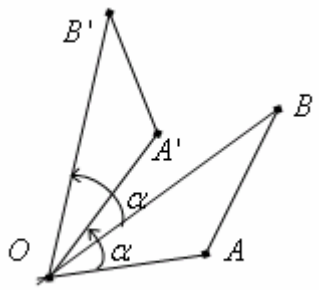
b) حدد الدوران العكسي للدوران r.

2) خاصيـــات الدوران

① الحفاظ على المسافة :

ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته α.

حيث $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$



بين أن $AB=A'B'$

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

$\equiv\alpha+\left(\overline{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right)-\alpha\ [2\pi]$

إذن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right)[2\pi]$

إذن $\left[A\hat{O}B\right]=\left[A'\hat{O}B'\right]$

ولدينا $AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB\cos\left(A\hat{O}B\right)$

$A'B'^2=OA'^2+OB'^2-2OA'.OB'\cos\left(A'\hat{O}B'\right)$

إذن $AB^2=A'B'^2$

ومنه $AB=A'B'$

خاصيـــة :

ليكن r دورانا و A و B نقطتين من المستوى P.

إذا كان $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ فإن $AB=A'B'$

ونقول أن الدوران يحافظ على المسافة.

② صورة قطعة بدوران

نعتبر القطعة $[AB]$ و r دورانا.

لتكن M نقطة من $[AB]$.

إذن يوجد عدد حقيقي λ من $[0,1]$ بحيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

ليكن $r(M)=M'$

لدينا $M\in[AB]$ أي $AM+MB=AB$

ولدينا $AM=A'M'$ و $M'B'=MB$ و $AB=A'B'$

إذن $A'M'+M'B'=A'B'$

إذن $M'\in[A'B']$

ولدينا $AM=\lambda AB$

إذن $A'M'=\lambda A'B'$

وبالتالي $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ لأن $M'\in[A'B']$

خاصيــة :

ليكن r دورانا.

- صورة القطعة $[AB]$ هي القطعة $[A'B']$.

حيث $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$

- إذا كانت $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ فإن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

حيث $r(M)=M'$

③ صورة مستقيم بدوران

لتكن A و B نقطتين مختلفتين و r دورانا.

و $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$

لتكن M نقطة من المستقيم (AB).

إذن يوجد λ من $\mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

- إذا كانت $0\le\lambda\le1$ فإن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$
- إذا كانت $1\prec\lambda$ فإن $\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$

إذن $\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{A'B'}$

إذن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

- إذا كانت $\lambda\prec0$ لدينا $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

إذن $(1-\lambda)\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BM}$

يعني $\overrightarrow{BM}=(1-\lambda)\overrightarrow{BA}$

إذن $\overrightarrow{B'M'}=(1-\lambda)\overrightarrow{B'A'}$

إذن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

وبالتالي صورة المستقيم (AB) هي المستقيم $(A'B')$.

خاصيــة : لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى.

و A' و B' صورتيهما بالدوران r على التوالي.

- صورة المستقيم (AB) هي المستقيم $(A'B')$.
- وإذا كانت $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فإن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

حيث $r(M)=M'$

④ صورة مرجح نقطتين بدوران

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β)

و $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ و $r(G)=G'$

لدينا $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{A'G'}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$

ومنه G' هو مرجح النقطتين المتزنتين (A',α) و (B',β).

خاصيــة : ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β)

إذا كانت $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ و $r(G)=G'$

فإن G' هو مرجح النقطتين المتزنيتين (A',α) و (B',β).

ونقول إن الدوران يحافظ على المرجح.

ملاحظة : يمكن تعميم هذه النتيجة إلى أكثر من نقطتين.

خاصية : إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$

و $r(I)=I'$ فإن I' منتصف $[A'B']$.

ونقول إن الدوران يحافظ على المنتصف.

⑤ الحفاظ على استقامية متجهتين.

خاصية : لتكن A و B و C و D أربع نقط بحيث $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$

إذا كان $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ و $r(C)=C'$ و $r(D)=D'$

فإن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

نقول إن الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين.

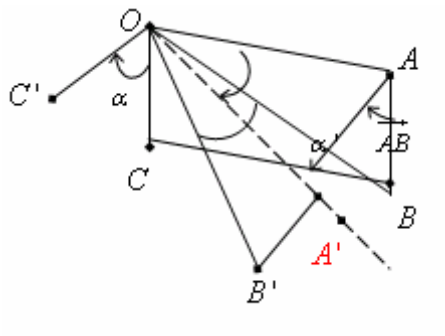
⑥ الدوران والزوايا الموجهة.

خاصية أساسية

ليكن r دورانا قياس زاويته α.

و A و B نقطتان من المستوى حيث $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha[2\pi]$



خاصية :

لتكن A و B و C و D أربع نقط $A\neq B$ و $C\neq D$

و r دورانا حيث $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ و $r(C)=C'$ و $r(D)=D'$

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}}\right)[2\pi]$

ونقول إن الدوران يحافظ على قياس الزوايا الموجهة.

ملاحظة : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}\right)[2\pi]$

⑦ صورة دائرة

تمهيد

خاصية : صورة الدائرة $\ell(\Omega,R)$ بدوران r

هي الدائرة $\ell(\Omega',R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$

3) تحديد دوران

① دوران محدد بنقطة وصورتها والزاوية

② دوران محدد بنقطتين وصورتيهما

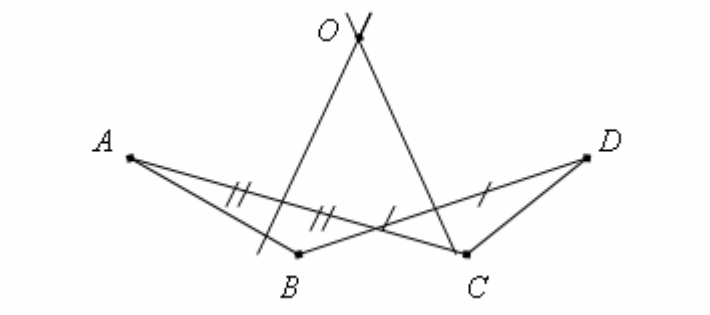
لتكن A و B و C و D أربعة نقط من المستوى P

بحيث المستقيمان (AB) و (CD) متقطعان

و $AB=CD$

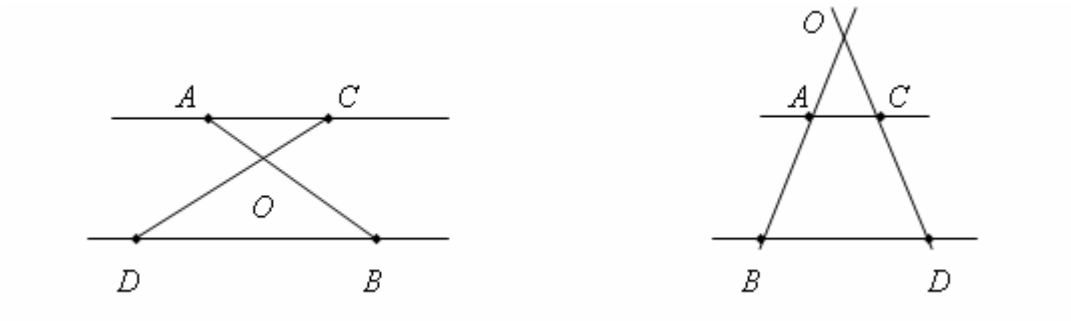
بين أنه يوجد دوران وحيد r بحيث $r(A)=C$ و $r(B)=D$

الحالة ① (AC) و (BD) متقاطعان



مركز هذا الدوران هو تقاطع واسطي القطعتين $[BD]$ و $[AC]$.

الحالة ② (AC) و (BD) متوازيان.



في هذه الحالة المركز هو تقاطع (AB) و (DC).