ملخص في الاحتمالات

◆**القاعدة الأساسية للعد :** نعتبر تجربة تتطلب p اختيار $(p\in\mathbb{N}^*)$

إذا كان الاختيار الأول يتم إجراؤه بعدد n_1 طريقة مختلفة و الاختيار الثاني يتم إجراؤه بعدد n_2 طريقة مختلفة و...

و كان الاختيار الأخير p يتم إجراؤه بعدد n_p طريقة مختلفة فإنّ عدد الطرق للمكنة لإجراء هذه التجربة بالترتيب المذكور هو الجداء: $n_1\times n_2\times n_3\times...\times n_p$

◆**أصلي مجموعة منتهية :** لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n.

يسمى العدد n أصلي المجموعة A و نرمز له $card(A)$ بمعنى $card(A)=n$

$card(\phi)=0$ و $card(\{0,1,2\})=3$

◆ نقبل دون برهان النتيجة التالية : إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين بحيث $A\cap B=\phi$ فإنّ :

$$card(A\cup B)=card(A)+card(B)$$

◆ في الحالة العامة : $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$

◆ لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة منتهية E

متمّم المجموعة A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي نرمزها بالرمز : $\overline{A}$ و المعرفة كمايلي :

$\overline{A}=\{x\in E/x\notin A\}$ $\quad A\cap\overline{A}=\phi$ و $A\cup\overline{A}=E$

◆ $card(\overline{A})=card(E)-card(A)$

◆ $card(A\times B)=card(A)\times card(B)$

◆ **رمز المضروب :** نستخدم في أحيان كثيرة في الرياضيات جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى n

نرمز إلى هذا الجداء بالرمز $n!$ و يقرأ n عاملي .

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$ كما نقبل اصطلاحا أنّ : $0!=1$ $\quad 5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$n!=n\times(n-1)!$

◆لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n

نسمي قائمة ذات r عنصر من المجموعة A كل عنصر من الشكل $(x_1,x_2,x_3,...,x_r)$ حيث :

$x_1,x_2,x_3,...,x_r$ عناصر كيفية من المجموعة A

◆ إنّ عدد قوائم المجموعة A مأخوذة r في كل مرة معطى بـ: $\widetilde{A_n^r}=n^r$

(عندما يتم تشكيل القائمة يسمح تكرار العنصر و يهم الترتيب)

◆ لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n و r عدد طبيعي حيث $0\le r\le n$

نسمي ترتيبة ذات r عنصر من عناصر المجموعة A كل قائمة ذات r عنصر من المجموعة A بحيث تكون هذه العناصر مختلفة مثنى مثنى بمعنى أنّه لا يسمح ز تكرار العنصر

◆إنّ عدد تراتيب المجموعة A مأخوذة r في كل مرة معطى بـ: $A_n^r=n\times(n-1)\times...(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

◆لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n

نسمي تبديلة لعناصر A كل تريبة لعناصر A يكون فيها $r=n$

الأستاذ بوجدور . ع

◆ إنّ عدد تباديل المجموعة A معطى بـ: $P_n = A_n^n = n!$

◆ نسمي توفيقة ذات r عنصر لمجموعة غير خالية A عدد عناصرها n كل مجموعة جزئية من A يكون عدد عناصرها r

◆ إنّ عدد توفيقات المجموعة A مأخوذة r في كل مرة معطى بـ: $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

◆ **بعض أنواع السحب:**

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة	الترتيب	التكرار
في آن واحد	C_n^r	غير مهم	غير مسموح
على التوالي مع الإرجاع	n^r	مهم	مسموح
على التوالي دون إرجاع	A_n^r	مهم	غير مسموح

◆ **خواص الأعداد** C_n^r

$C_n^0 = 1$ ، $C_n^n = 1$ ، $C_n^1 = n$ ، $C_n^{n-1} = n$ ، $C_n^{n-r} = C_n^r$ ، $C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$

◆ **مثلث باسكال :**

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

إن قيم العمود الثاني كلها تساوي 1

وذلك تطبيقا للخاصية $C_n^0 = 1$

إن قيم قطر المثلث كلها تساوي 1

وذلك تطبيقا للخاصية $C_n^n = 1$

بقية قيم المثلث نتحصل عليها بتطبيق الخاصية $C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$

◆ دستور ثنائي الحد لنيوتن : $(a+b)^n = C_n^0 a^n.b^0 + C_n^1 a^{n-1}.b^1 + ... + C_n^k a^{n-k}.b^k + ... + C_n^n a^0.b^n$

◆ نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجازها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة لها

◆ **مصطلحات الاحتمالات:** بالقيام بتجربة عشوائية نحصل على نتيجة معينة من بين نتائج ممكنة

◆ إن جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية تسمى مجموعة الإمكانيات أو المجموعة الشاملة و نرمز لها بالرمز Ω

◆ كل مجموعة جزئية من المجموعة Ω تسمى حادثة أو حادث

الأستاذ : بوجدور . ع

◆ كل حادث مكون من عنصر واحد يسمى حادث ابتدائي

◆الجزء الفارغ $\phi \subset \Omega$ يسمى الحادث المستحيل لأنه لايتحقق أبدًا ◆ الجزء Ω يسمى الحادث المؤكد

◆نقول عن الحادث A أنه تحقق إذا انتهت التجربة و كانت نتيجتها عنصر من المجموعة A

◆الحادث المضاد للحادث A هو الحادث المعاكس له و نرمز له بالرمز $\overline{A}$ و الذي يتحقق عندما لايتحقق A

◆نقول عن الحدثين A و B أنهما متنافيان (غير منسجمين) إذا كان : $A \cap B = \phi$

◆ الفضاءات الاحتمالية ◆

◆لتكن Ω مجموعة منتهية، نسمي احتمالا على Ω كل دالة p معرفة على مجموعة أجزاء المجموعة Ω و التي تأخذ قيمها في المجال $[0;1]$ و تحقق الشرطين التاليين.

❶ $p(\Omega)=1$ ❷ إذا كان : $A \cap B = \phi$ فإنّ إذا كان : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

◆**خواص :** مهما كان الحدثان A و B من Ω.

❶ $p(\phi)=0$ ❷ $0 \le p(A) \le 1$ ❸ إذا كان : $A \subset B$ فإن : $p(A) \le p(B)$

❹ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ ❺ $p(A-B) = p(A) - p(A \cap B)$ ❻ $p(A \cup B) \le p(A) + p(B)$

❼مهما كان الحدثان A و B من Ω : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

◆إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية Ω فإنه لكل حادث A من Ω. فإنّ

$$p(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة للمجموعة وقوع } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{عدد عناصر المجموعة A}}{\text{عدد عناصر المجموعة } \Omega} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

◆ليكن A و B حادثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $p(A) \neq 0$

الاحتمال الشرطي لوقوع الحادثة B علما أن الحادث A قد وقع هو العدد الحقيقي الموجب

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\text{عدد عناصر المجموعة } (A \cap B)}{\text{عدد عناصر المجموعة } A}$$

◆نقول عن الحادثين A و B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لايؤثر على وقوع أو عدم وقوع الآخر بمعنى آخر أنّ: $p(B/A) = p(B)$

أي أن استقلال A و B معناه أن احتمال A و B هو جداء احتماليهما

الأستاذ: بوجدور . ع

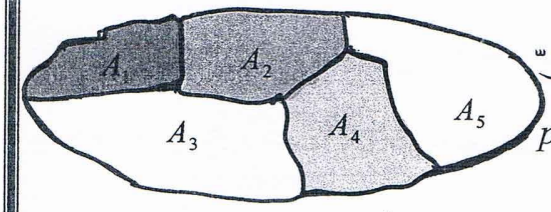
◆إذا كان $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$ فإن: $p(A\cap B)=p(B/A)\times p(A)=p(A/B)\times p(B)$

◆نقول أن الحوادث A_1، A_2، ...و A_n تشكل تجزئة للمجموعة E عندما تكون هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى و اتحادها هو E و كلها ليست خالية

◆A حادثة احتمالها غير معدوم، $\overline{A}$ حادثتها العكسية. A و $\overline{A}$ تشكل تجزئة لـ E

◆B حادثة من E. إذن الحادثتان $B\cap A$ و $B\cap\overline{A}$ متنافيتين و $(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})=B$

و بالتالي $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})=p(B/A)\times p(A)+p(B/\overline{A})\times p(\overline{A})$



◆إذا كانت الحوادث A_1، A_2، ...و A_n تشكل تجزئة للمجموعة E فإن:
$p(B)=p_{A_1}(B)\times p(A_1)+p_{A_2}(B)\times p(A_2)+....+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$

◆المتغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E و مزودة باحتمال p

لتكن x_1، x_2، ...و x_n القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X و التي نرمزها بالرمز $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

قانون احتمال متغير عشوائي هو الدالة f التي تربط كل عنصر x_i من المجموعة $X(\Omega)$ باحتمال الحدث
$f(x_i)=p(X=x_i)=p_i$

يتم تحديد قانون احتمال متغير عشوائي بتحديد مجموعة قيم X ثم كتابة النتائج في جدول يسمى جدول قانون حتمال المتغير العشوائي

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p_i=p(x=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

◆الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل $E(X)$ المعطى بـ $E(X)=\sum_{i=0}^{n}x_i\,p_i$

◆التباين لقانون احتمال هو العدد $V(X)$ حيث $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

◆الانحراف المعياري هو $\delta(X)=\sqrt{V(X)}$

◆ X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي

◆لدينا $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ و $E(aX)=aE(X)$

◆X متغير عشوائي و a و b عددان حقيقيان لدينا: ❶ $E(X+a)=E(X)+a$
❷ $V(aX)=a^2V(X)$ ❸ $\delta(aX)=|a|\delta(X)$ ❹ $V(X+a)=V(X)$ ❺ $\delta(X+a)=\delta(X)$

الأستاذ: بوجدور . ع

تصوير

رفع

وتحميل

أحْمد أمير