

التمرين الأول ☺

f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. حدد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

4. بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$ ، وفسر النتيجة هندسياً.

5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

6. احسب إحداثي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل ثم ارسم كلا من (T) و (C_f) .

7. ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x = m+1$

الحل ☺

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - 1 = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(3 + e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})} = \frac{3}{1} = 3$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(3(e^x + 1) - (3e^x - 1))}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(3e^x + 3 - 3e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ لأن $4e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	3

3. تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 3$ بجوار $+\infty$.

4. تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$.

$$f(x) + f(-x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{e^{-x}(3 + e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2$$

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(x) + f(-x) = 2$ معناه $f(-x) = 2 - f(x)$ أي

$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5. تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

(T) معامل توجيهه 1 معناه $f'(x) = 1$.

لنحل المعادلة $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 1 \text{ معناه } \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 \text{ يكافئ } 4e^x = e^{2x} + 2e^x + 1 \text{ يكافئ } e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \text{ يكافئ } (e^x - 1)^2 = 0$$

أي $x = 0$ وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0.

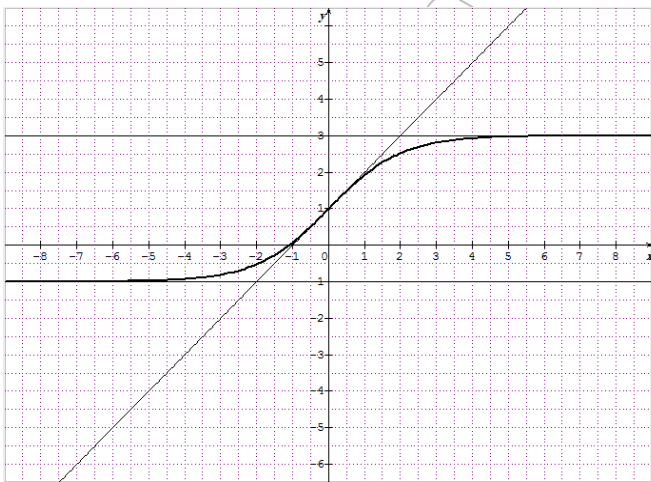
كتابة معادلة المماس (T) .

$$y = x + 1 \text{ أي } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

6. حساب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = 0 \text{ وتكافئ } 3e^x - 1 = 0 \text{ وتكافئ } e^x = \frac{1}{3} \text{ أي } x = -\ln 3 \text{ إذن } (C_f) \cap (Ox) = \{B(-\ln 3; 0)\}$$

رسم كلا من (C_f) و (T) .

7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

وإشارة حلول المعادلة: $(3 - m)e^x = m + 1$

$$3e^x - me^x = m + 1 \text{ يكافئ } (3 - m)e^x = m + 1$$

$$\text{يكافئ } f(x) = m \text{ أي } 3e^x - 1 = m(e^x + 1)$$

إذا كان $m \leq -1$ أو $m \geq 3$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $-1 < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

إذا كان $1 < m < 3$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا و وحيدا

معدوما.

التمرين الثاني

I) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (2 - x)e^x - 1$

1. عيّن نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2. أدرس تغيرات الدالة g .

ب - شكل جدول تغيّرات الدالة g .

3. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.

4. استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3. أ - بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ (حيث العدد α المعرفة في السؤال 3 الجزء I)

ب - عيّن حصراً للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ج - ارسم (C_f).

الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1. تعيين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - 1 = -1$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ إذن

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - 1 = -\infty$

2. أدراسة تغيّرات الدالة g .

الدالة g تقبل الإشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $g'(x) = -e^x + e^x(2-x) = e^x(1-x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1-x)$

من أجل $x \in]1; +\infty[$ أي $1-x < 0$ أي $g'(x) < 0$

من أجل $x \in]-\infty; 1[$ أي $1-x > 0$ أي $g'(x) > 0$

وعليه الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]1; +\infty[$ و متزايدة تماماً على المجال $] -\infty; 1[$

ج - جدول تغيّرات الدالة g .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-1	$e-1$	$-\infty$

3. تبين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 1]$ و خاصة على المجال $[-1, 2; -1, 1]$ و $g(-1, 2) \approx -0,03$ ،
 $g(-1, 1) \approx 0,03$ إذن $g(-1, 2) \times g(-1, 1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α
من المجال $]-1, 2; -1, 1]$ بحيث $g(\alpha) = 0$
ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ و خاصة على المجال $[1, 8; 1, 9]$ و $g(1, 8) \approx 0,2$ ،
 $g(1, 9) \approx -0,3$ إذن $g(1, 8) \times g(1, 9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال
 $[1, 8; 1, 9]$ بحيث $g(\beta) = 0$.
4. استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	—	0	+	—

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = 1$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

لدينا $(e^x - x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha) = 0$ ؛ $f'(\beta) = 0$

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[\cup]\beta; +\infty[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; \alpha[$ و $]\beta; +\infty[$.

من أجل $x \in]\alpha; \beta[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; \beta]$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	—
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1

3. أ - تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

لدينا $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ تكافئ $(2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0$ وتكافئ $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

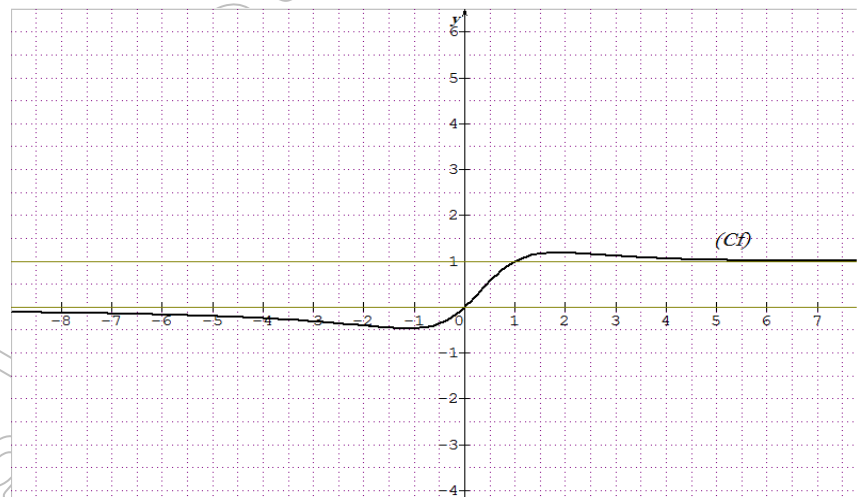
ومنه $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \frac{\frac{-1+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}$

ب - تعيين حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

$-1,1 < \alpha < -1,2$ معناه $-2,2 < \alpha - 1 < -2,1$ تكافئ $\frac{1}{-2,1} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{-2,2}$ أي $-0,48 < f(\alpha) < -0,45$.

ولدينا $1,8 < \beta < 1,9$ معناه $0,8 < \beta - 1 < 0,9$ تكافئ $\frac{1}{0,9} < \frac{1}{\beta-1} < \frac{1}{0,8}$ أي $1,11 < f(\beta) < 1,25$.

ج - رسم (C_f) .



التمرين الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+2)$ ، ثم فسّر النتيجة ببيانها.

4. أ - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = k$.

5. ارسم (C_f) ومستقيمي المقاربين.

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $f(x) + f(-x)$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x + 1} - x + \frac{2}{e^{-x} + 1} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(x) + f(-x) = 2$ معناه $f(-x) = 2 - f(x)$ أي

$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$ إذن النقطة $\omega(0; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2}{e^x + 1} = +\infty$$

استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - f(-x)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [2 - f(t)] = -\infty \text{ ومنه } f(x) = 2 - f(-x)$$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

إذن $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

جدول التغيرات.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. أ. تبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

تفسير النتيجة بياناً.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $-\infty$

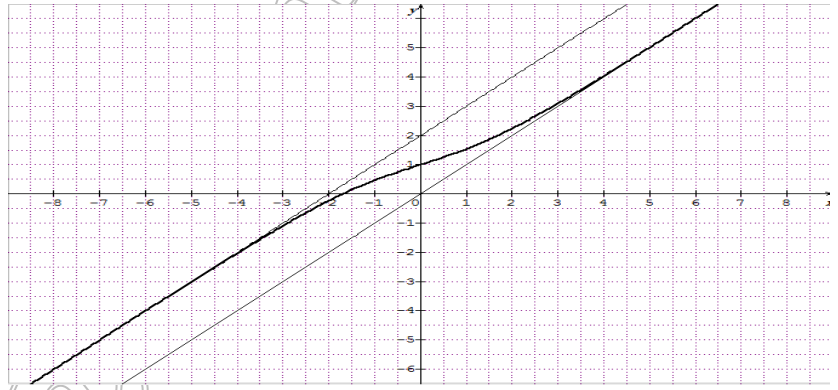
4. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

لدينا الدالة f مستمرة على \mathbb{R} وبالخصوص على المجال $[-1,7; -1,6]$ و $f(-1,7) \approx -0,008$ ، $f(-1,6) \approx 0,064$ أي $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[-1,7; -1,6]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} فإن α وحيد.

ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$ وخاصة $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2$ ومنه $f(-\alpha) = 2 - f(\alpha)$ لأن $f(\alpha) = 0$ إذن العدد $(-\alpha)$ هو حل للمعادلة $f(x) = 2$ وعليه $k = 2$.

5. رسم (C_f) ومستقيميته المقاربين.



التمرين الرابع

I - دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $g(x) = e^x + x + 1$

1. ادرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II - دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج تغيرات f على \mathbb{R} .

2. بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. عين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (d) و (C_f) .

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ، ثم ارسم (d) و (Δ) و (C_f) .

الحل

I - دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $g(x) = e^x + x + 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + x + 1 = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$.

الدالة g مستمرة على \mathbb{R} وبالتالي على المجال $[-1,3; -1,2]$ ولدينا $g(-1,3) \approx -0,02$ ، $g(-1,2) \approx 0,10$ أي $g(-1,3) \times g(-1,2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $[-1,3; -1,2]$ بحيث $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماماً على \mathbb{R} فإن α وحيد.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ ؛ و $g(\alpha) = 0$.

II- دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

(تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$)

$$1. \text{ تبين أن } f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + xe^x - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

استنتاج تغيرات f على \mathbb{R} .إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.في المجال $]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ وفي المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[$ و متزايدة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x (1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

2. تبين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$.لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ أي $e^\alpha = -(\alpha + 1)$

$$\text{إذن } f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-(\alpha + 1) + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-(\alpha + 1) + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

طريقة ثانية:

$$\text{لدينا } f(\alpha) - (\alpha + 1) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} - (\alpha + 1) = \frac{\alpha e^\alpha - \alpha e^\alpha - e^\alpha - \alpha - 1}{e^\alpha + 1} = \frac{-(e^\alpha + \alpha + 1)}{e^\alpha + 1} = \frac{-g(\alpha)}{e^\alpha + 1}$$

لكن $g(\alpha) = 0$ ومنه $f(\alpha) - (\alpha + 1) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha + 1$ استنتاج حصراً لـ $f(\alpha)$.

$$-1,3 < \alpha < -0,2 \text{ معناه } -0,3 < \alpha + 1 < -0,2 \text{ أي } -0,3 < f(\alpha) < -0,2.$$

3. تعيين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

$$(d): y = \frac{1}{2}x \text{ ولدينا } y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ و } f'(0) = \frac{1}{2} \text{ و } f(0) = 0 \text{ ومنه } y = \frac{1}{2}x$$

دراسة الوضع النسبي لـ (d) و (C_f) ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{2} = \frac{2x e^x - x e^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x e^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

لدينا $2(e^x + 1) > 0$ ومنه إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ هي نفس إشارة $x(e^x - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f(x) - \frac{1}{2}x$	$+$		$+$
الوضعية	(C _f) فوق (d)		(C _f) فوق (d)
	يمس		

4. تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

$$f(x) - x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - x = \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

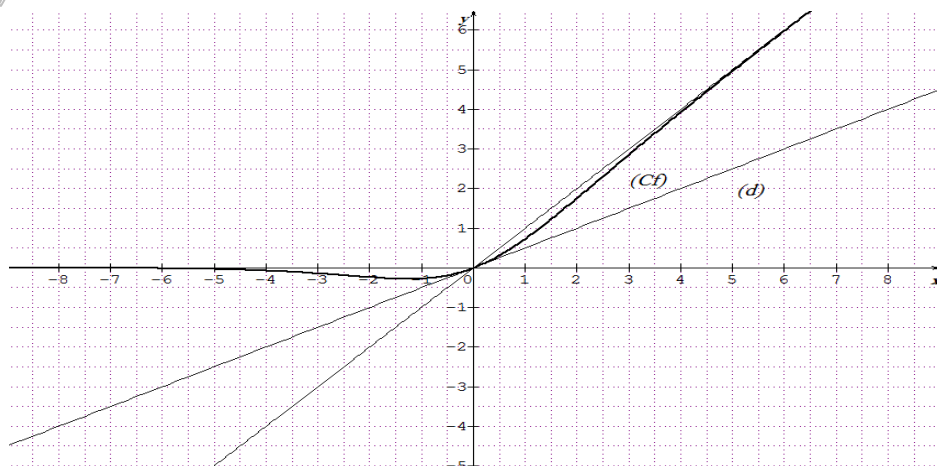
5. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C _f) فوق (Δ)		(C _f) تحت (Δ)

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في O .

رسم (d) و (Δ) و (C_f) .



التمرين الخامس

I. الدالة g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0,25$ و $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1,43$)

2. أ. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في \mathbb{R} ، ثم تحقّق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II. الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب. بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ. بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$. (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f).

ب. شكّل جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} . (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)

3. أ. بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب. مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

ج. ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

الحل

1. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 e^{-x} - e^{-x}$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ (التزايد المقارن) و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 - 1)$

$$= e^{-x} [2x - (x^2 - 1)]$$

$$= e^{-x} (-x^2 + 2x + 1)$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-x^2 + 2x + 1)$.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 1$	—	0	+	—

الدالة g متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; 1 - \sqrt{2}]$ و $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$ ومتزايدة تماماً على المجال $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	α	$1-\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$		$g(1-\sqrt{2})$	$g(1+\sqrt{2})$		1

2. أ- تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في \mathbb{R} .

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2}); +\infty[$ ولدينا $0,25 \leq g(1-\sqrt{2}) < 0$ إذن $0 \in [g(1-\sqrt{2}); +\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ ولدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2}); g(1+\sqrt{2})]$ و $0 \in [g(1-\sqrt{2}); g(1+\sqrt{2})]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $[1+\sqrt{2}; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]1; g(1+\sqrt{2})]$ و $0 \notin]1; g(1+\sqrt{2})]$ إذن على المجال $[1+\sqrt{2}; +\infty[$ ، $g(x) \neq 0$ ، خلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في \mathbb{R} .
التحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$
بما أن $g(0)=1+(0-1)e^0=0$ فإن $\beta=0$ ولدينا $g(-0,7) \leq 0,19$ و $g(-0,8) \leq 0$ أي $g(-0,7) \times g(-0,8) < 0$ ومنه $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

II - الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.1. أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ب- تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$f(x) - x = x - (x+1)^2 e^{-x} - x = -(x+1)^2 e^{-x} = -(x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + e^{-x}\right) = 0 \text{ إذن}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ليكن x عددا حقيقيا؛ $f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x}$

لدينا $e^{-x} > 0$ و $(x+1)^2 \geq 0$ إذن $f(x) - x \leq 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 - [2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2] = 1 - [e^{-x}(1-x^2)] = 1 + e^{-x}(x^2 - 1) = g(x)$$

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-1	$+\infty$

3. أ - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

$f'(x_0) = 1$ يكافئ $1 + (x_0^2 - 1)e^{-x_0} = 1$ ويكافئ $(x_0^2 - 1)e^{-x_0} = 0$ لدينا $e^{-x_0} \neq 0$ ومنه $x_0^2 - 1 = 0$ أي $x_0 = 1$ أو

$x_0 = -1$ إذن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 عند النقطتين $M(1; f(1))$ و $M'(-1; f(-1))$.

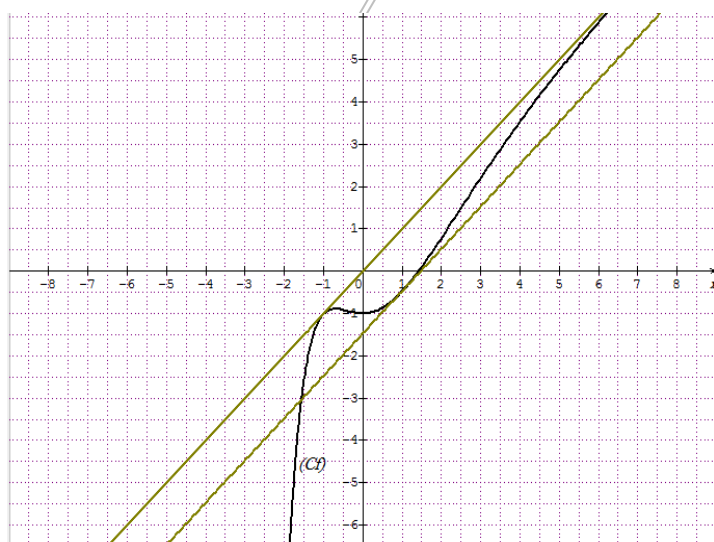
كتابة معادلة المماسين

المماس عند النقطة $(1; f(1))$ معادلته $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = x - 1 + (1 - 4e^{-1})$ أي $y = x - 4e^{-1}$

المماس عند النقطة $(-1; f(-1))$ معادلته $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ومنه $y = x + 1 - 1$ أي $y = x$

ب - تمثيل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

ج - المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.



$$me^x = -(x+1)^2 \text{ تكافئ } (x+1)^2 + me^x = 0$$

$$\text{وتكافئ } m = -(x+1)^2 e^{-x} \text{ و تكافئ}$$

$$f(x) = x + m \text{ أي } x + m = x - (x+1)^2 e^{-x}$$

إذا كان $m \in]-\infty; -4e^{-1}]$ فإن المعادلة تقبل حلا

وحيدا

إذا كان $m = -4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما

مضاعف

إذا كان $m \in]-4e^{-1}; 0[$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول

إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا
إذا كان $m \in]0; +\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

التمرين السادس

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = e^x - x - 1$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

(3) علل أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$.

II-1. أ) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) فسّر النتائج هندسيا.

2. أ) احسب $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) عيّن معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

ج) علل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أرسم (T) و (C_f) .

الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = e^x - x - 1$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0$ معناه $e^x - 1 = 0$ ويكافئ $e^x = 1$ أي $x = 0$

$g'(x) > 0$ معناه $e^x - 1 > 0$ ويكافئ $e^x > 1$ أي $x > 0$

$g'(x) < 0$ معناه $e^x - 1 < 0$ ويكافئ $e^x < 1$ أي $x < 0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

(2) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

لدينا $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ ؛

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند

$x = 0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq g(0)$ أي $g(x) \geq 0$.

(3) تعليل أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$ يكافئ $e^x - x - 1 \geq 0$ أي $e^x - x \geq 1$ وبالتالي $e^x - x > 0$

II-1. أ) حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = 0$$

(ب) تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$.و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$.2. أ) حساب $f'(x)$.ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f لدينا $e^x > 0$ و $(e^x - x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-x)$ من أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $1-x < 0$ ومنه $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 1[$ ، $1-x > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$\frac{1}{e-1}$	0

3. أ) تعيين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.معادلة المماس (T) هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = x$.(ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

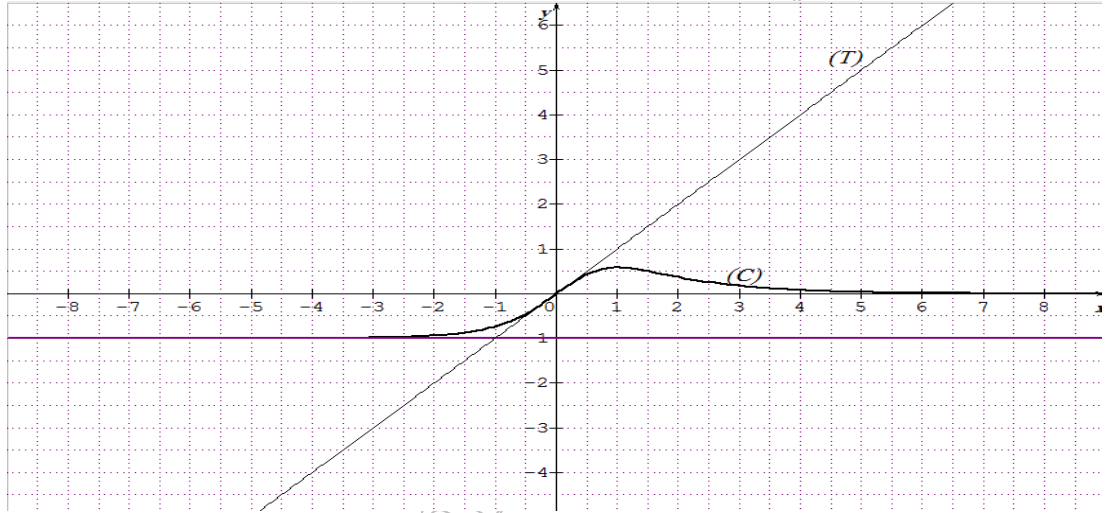
$$\text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا: } f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$$

لدينا $g(x) \geq 0$ و $e^x - x > 0$ ومنه إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة $-x$ إذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ ومنه $f(x) - x < 0$ إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ ومنه $f(x) - x > 0$ وعليه من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، (C_f) يوجد فوق (T) ، ومن أجل $x \in]0; +\infty[$ ، (C_f) يوجد تحت (T)

و (T) يخرق (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

(ج) تعليل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

بما أن المماس (T) يخرق المنحنى (C_f) في نقطة التماس O فإن النقطة O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).
رسم (T) و (C_f).



التمرين السابع ☺

(I) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

1. احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = x + (x-2)e^x$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f). ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

6. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6 < \alpha < 1,7$.

7. احسب $f(0)$ ، $f(1)$ ثم ارسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f).

8. ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

الحل ☺

(I) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

1. حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^x - e^x = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^x - e^x = 1$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x-1)e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x-1)e^x = +\infty$.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x وعليه $g'(0) = 0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ فإن $g'(x) < 0$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0[$ و متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	1	0	$+\infty$

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x) \geq 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = x + (x-2)e^x$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 + e^x + (x-2)e^x = 1 + (x-1)e^x = g(x)$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه أجل كل $x \in]-\infty; 2]$ ، $f'(x) \geq 0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; 2]$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	2
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	2

2. تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) . ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x$.

3. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

طريقة 1: لدينا $f'(x) = g'(x)$ ومنه $f''(x)$ تنعدم عند 2 وتغير من إشارتها ما يعني أن النقطة $\omega(0; -2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

طريقة 2: لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 2]$ و $f'(0) = 0$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مماساً أفقياً عند النقطة $\omega(0; -2)$ معادلته $y = -2$.

نلخص إشارة $f(x) + 2$ من خلال جدول تغيرات الدالة f .

من أجل $x \in]-\infty; 0]$ أي $f(x) < -2$ أي $f(x) + 2 < 0$

ومن أجل $x \in]0; 2]$ أي $f(x) > -2$ أي $f(x) + 2 > 0$

في المجال $]-\infty; 0]$ المنحنى (C_f) يقع تحت مماسه ؛ وفي المجال $]0; 2]$ المنحنى (C_f) يقع فوق مماسه.

إذن المماس يقطع المنحنى في نقطة التماس $\omega(0; -2)$ وهذا يعني أن النقطة $\omega(0; -2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .
ملاحظة: يمكن إثبات ذلك مباشرة بما أن $f'(x)$ تنعدم عند 0 ولا تتغير من إشارتها فإن النقطة $\omega(0; -2)$ هي نقطة إنعطاف.

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(1) \quad y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \text{ومنه} \quad y = (x-1) + 1 - e \quad \text{أي} \quad (T): y = x - e$$

6. تبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6 < \alpha < 1,7$.

لدينا الدالة f مستمرة على \mathbb{R} وخاصة على المجال $[1,6; 1,7]$ و $f(1,6) \approx -0,38$ ، $f(1,7) \approx 0,05$ أي

$$g(1,6) \times g(1,7) < 0 \quad \text{ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي} \alpha \text{ من المجال }]1,6; 1,7[\text{ بحيث } f(\alpha) = 0$$

وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} فإن α وحيد.

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها

α حيث: $1,6 < \alpha < 1,7$.

7. حساب $f(0)$ ، $f(1)$ ورسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .

$$f(2) = 2 + (2-2)e^2 = 2 \quad , \quad f(0) = 0 + (0-2)e^0 = -2$$

8. المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

$$\text{المعادلة: } f(x) = x + m$$

إذا كان $m < -e$ أو $m > 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلاً

إذا كان $m = -e$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً

إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً وحيداً

إذا كان $-e < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين.

التمرين الثامن

(I) الدالة g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (1-x)e^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[0; +\infty[$.

3. تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$ ، ثم استنتج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بَيِّنْ أَنَّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، ثم فسِّر النتيجة هندسياً.

2. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - بَيِّنْ أَنَّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ') هو المستقيم ذو المعادلة $y = 1$.

4. أ - بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ حَقِيقِي x ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

ب - بَيِّنْ أَنَّ $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5. أ - أثبت أَنَّ (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب - أثبت أَنَّ المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) في النقطة $M(-\alpha; 0)$ موازياً للمستقيم (Δ) .

ج - اكتب معادلة (T) .

6. ارسم (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f) .

7. ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + f(m)$.

الحل

(I) الدالة g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (1-x)e^x$.

1. دراسة تغيرات الدالة g .

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x - xe^x = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x(1-x) = -\infty$

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $g'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -xe^x$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$ وعليه $g'(0) = 0$

من أجل $x \in]-\infty; 0]$ ، $-x > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ و من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، $-x < 0$ ومنه $g'(x) < 0$

إذن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	
$g(x)$	1	2	0	$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $] -\infty; 2]$ و $0 \in] -\infty; 2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$.

3. التحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$.

لدينا $g(1,28) \approx -0,007$ و $g(1,27) \approx 0,03$ إذن $g(1,28) \times g(1,27) < 0$ ومنه $1,27 < \alpha < 1,28$.

استنتاج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ و $g(\alpha) = 0$.

(II) f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 1$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

2. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x + 1 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1} = -\infty$$

ب - تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

$$f(x) - (x + 1) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1} - (x + 1) = \frac{e^x + x + 1 - xe^x - e^x - x - 1}{e^x + 1} = \frac{-xe^x}{e^x + 1}$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$$

ومن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

3. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

$$\text{ليكن } x \in \mathbb{R} \text{ لدينا } f(x) - (x + 1) = \frac{-xe^x}{e^x + 1}$$

$e^x + 1 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة $f(x) - (x + 1)$ على \square هي نفس إشارة $-x$.

إذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ ومنه $f(x) - (x + 1) < 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ ومنه $f(x) - (x + 1) > 0$

وعليه من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، (C_f) يوجد فوق (Δ) ، ومن أجل $x \in]0; +\infty[$ ، (C_f) يوجد تحت (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') ذو المعادلة $y = 1$.

$$f(x) - 1 = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1} - 1 = \frac{x}{e^x + 1}$$

وعليه من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، (C_f) يكون فوق (Δ') ؛ ومن أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، (C_f) يكون أسفل (Δ')

و (C_f) يقطع (Δ') في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.

4. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ،

$$f(x) - 1 = \frac{x}{e^x + 1} \text{ ولدينا } f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 1 \text{ ومنه } f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 1$$

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x) = \frac{1(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1 + (1 - x)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن $(e^x + 1)^2 > 0$ وعليه

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ أي $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$

ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ أي $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$ و متناقصة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ب - تبين أن $f(\alpha) = \alpha$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} + 1 \text{ ولدينا } g(\alpha) = 0 \text{ تكافئ } 1 + (1 - \alpha)e^\alpha = 0 \text{ ومنه } e^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} + 1 = \frac{\alpha}{\frac{1}{1 - \alpha} + 1} + 1 = \frac{\alpha}{\frac{1 - \alpha + 1}{1 - \alpha}} + 1 = \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha} \right) + 1 = \alpha$$

$$f(\alpha) - \alpha = \frac{e^\alpha + \alpha + 1}{e^\alpha + 1} - \alpha = \frac{e^\alpha + \alpha + 1 - \alpha e^\alpha - \alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{1 + (1 - \alpha)e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{g(\alpha)}{e^\alpha + 1} = 0$$

لدينا $f(\alpha) - \alpha = 0$ فإن $f(\alpha) = \alpha$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	$-\infty$	α	$-\infty$

5. أ - تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

$$f(-\alpha) = \frac{e^{-\alpha} - \alpha + 1}{e^{-\alpha} + 1} \text{ ولدينا } e^{-\alpha} = \frac{1}{e^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} \text{ يكافئ } e^{-\alpha} = \alpha - 1$$

إذن $f(-\alpha) = \frac{(\alpha-1)-\alpha+1}{(\alpha-1)+1} = 0$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب - تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(-\alpha; 0)$ موازيا للمستقيم (Δ) .

المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(-\alpha) = 1$

$$f'(-\alpha) = \frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2} = \frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2} = \frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(\alpha-1+1)^2} = \frac{1+\alpha^2-1}{\alpha^2} = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha; 0)$ موازيا للمستقيم (Δ) .

ج - كتابة معادلة (T) .

معادلة المماس (T) هي: $y = f'(-\alpha)(x + \alpha) + f(-\alpha)$ أي $y = x + \alpha$

6. رسم (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f) .

7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد حلول المعادلة $f(x) = x + f(m)$.

إذا كان $m < 0$ فإن $f(m) < 1$

ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا

إذا كان $m = 0$ فإن $f(m) = 1$ ومنه المعادلة تقبل

حلا وحيدا معدوما

إذا كان $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن

$1 < f(m) < \alpha$ ومنه المعادلة تقبل حلين سالبين

إذا كان $m = \alpha$ فإن $f(m) = \alpha$

ومنه المعادلة تقبل حلا واحد مضاعفا $x = -\alpha$.

التمرين التاسع

I - g دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2x + 4 - 4e^x$.

أ - ادرس تغيرات الدالة g .

ب - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,6 < \alpha < -1,59$.

ج - استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II - f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(2xe^x + 1)^2}$.

2. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتائج هندسيا.

3. ادرس تغيرات الدالة f .

4. حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

5. بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم عيّن حصراً للعدد $f(\alpha)$.

6. ارسم المنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2mx - 2 + (m+1)e^{-x} = 0$.

الحل

I- دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2x + 4 - 4e^x$.

أ- دراسة تغيرات الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $g'(x) = 2 - 4e^x = 2(1 - 2e^x)$

$g'(x) = 0$ معناه $1 - 2e^x = 0$ يكافئ $e^x = \frac{1}{2}$ أي $x = -\ln 2$

$g'(x) > 0$ معناه $1 - 2e^x > 0$ يكافئ $e^x < \frac{1}{2}$ أي $x < -\ln 2$

$g'(x) < 0$ معناه $1 - 2e^x < 0$ يكافئ $e^x > \frac{1}{2}$ أي $x > -\ln 2$

إذن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -\ln 2]$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\ln 2; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 4 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 4 - 4e^x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 4 - 4e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \frac{4}{x} - 4\frac{e^x}{x} \right) = -\infty$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$2 - 2\ln 2$	$-\infty$

ب- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,6 < \alpha < -1,59$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -\ln 2]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2 - 2\ln 2]$ و $0 \in]-\infty; 2 - 2\ln 2]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-\infty; -\ln 2]$ بحيث $g(\alpha) = 0$

و كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-\ln 2; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2 - 2\ln 2]$ و

$0 \in]-\infty; 2 - 2\ln 2]$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد β في المجال $]-\ln 2; +\infty[$ بحيث $g(\beta) = 0$

و بما أن $g(0) = 2(0) + 4 - 4e^0 = 0$ فإن $\beta = 0$

ولدينا $g(-1,6) \approx -0,007$ و $g(-1,59) \approx 0,004$ أي $g(-1,59) \times g(-1,6) < 0$ ومنه $-1,6 < \alpha < -1,59$

ج- استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

II - دالة عددية معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(2xe^x + 1)^2}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{2e^x(2xe^x + 1) - ((2e^x + 2xe^x)(2e^x - 1))}{(2xe^x + 1)^2} = \frac{4xe^{2x} + 2e^x - 4e^{2x} + 2e^x - 4xe^{2x} + 2xe^x}{(2xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x + 2xe^x - 4e^{2x}}{(2xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(2x + 4 - 4e^x)}{(2xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(2xe^x + 1)^2}$$

2. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تفسير النتائج هندسياً.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - 1 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x + 1 = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(2 - e^{-x})}{e^x(2x + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - e^{-x})}{(2x + e^{-x})} = 0$$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y = 0$ و $y = -1$ بجوارات $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

3. دراسة تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha) = 0$ ؛

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$ يكون $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; \alpha[$ و $]0; +\infty[$

ومن أجل كل $x \in]\alpha; 0[$ يكون $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; 0]$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	-1	$f(\alpha)$	0	1	0

4. حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1} = 0 \text{ وتكافئ } 2e^x - 1 = 0 \text{ أي } x = -\ln 2.$$

إشارة $f(x)$.

يمكن إستنتاج إشارة $f(x)$ من جدول تغيراتها والتي تكون كما يلي:

من أجل $x \in]-\infty; -\ln 2[$ ، $f(x) < 0$ ؛ ومن أجل $x \in]-\ln 2; +\infty[$ ، $f(x) > 0$ ؛ كما أنّ $f(-\ln 2) = 0$.

5. تبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

$$2\alpha e^\alpha = \alpha^2 + 2\alpha \text{ أي } e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2} \text{ و يكافئ } 2\alpha + 4 - 4e^\alpha = 0 \text{ ولدينا } f(\alpha) = \frac{2e^\alpha - 1}{2\alpha e^\alpha + 1}$$

$$\text{إذن } f(\alpha) = \frac{2e^\alpha - 1}{2\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha+2)-1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$$

تعيين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $-1,6 < \alpha < -1,59$ معناه

$$-0,6 < \alpha + 1 < -0,59 \text{ و يكافئ}$$

$$\text{أي } \frac{1}{-0,59} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{-0,6}$$

$$-1,7 < f(\alpha) < -1,66$$

6. رسم المنحنى (C_f) .

7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ،

عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$2mx - 2 + (m+1)e^{-x} = 0$$

$$\text{معناه } 2mx - 2 + (m+1)e^{-x} = 0$$

$$f(x) = m \text{ أي } m = \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1} \text{ وتكافئ } m(2xe^x + 1) = 2e^x - 1 \text{ ومعناه } 2mxe^x - 2e^x + m + 1 = 0$$

إذا كان $m < \frac{1}{\alpha+1}$ أو $m > 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m = \frac{1}{\alpha+1}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا $x = \alpha$

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.

إذا كان $\frac{1}{\alpha+1} < m < -1$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين.

إذا كان $-1 < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

إذا كان $0 < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

التمرين العاشر

I- نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38 < \alpha < -0,37$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم x .

II- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

2. ادرس تغيّرات الدالة f .
- . بَيِّنْ أَنَّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
4. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .
5. بَيِّنْ أَنَّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.
6. بَيِّنْ أَنَّ $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$.
7. ارسم (d) و (C_f) ؛ نأخذ $\alpha \approx -0,375$.

III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y = 2x + \beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. عَيِّنْ β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
2. ناقش بياننا، حسب قيم العدد الحقيقي β ، عدد حلول المعادلة: $-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0$

الحل ☺

I- نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. دراسة تغيّرات الدالة g .

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} + 2 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - e^{-x} + 2 = 2$

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-1) = e^{-x}(2-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(2-x)$ وعليه $g'(2) = 0$

من أجل كل $x \in]-\infty; 2[$ فإن $2-x > 0$ أي $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2[$.

ومن أجل كل $x \in]2; +\infty[$ فإن $2-x < 0$ أي $g'(x) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]2; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$		$2+e^{-2}$	2

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38 < \alpha < -0,37$.

لدينا الدالة g مستمرة على المجال $]-\infty; 2[$ وبالتالي على المجال $[-0,38; -0,37]$ و $g(-0,38) \approx -0,01$ و $g(-0,37) \approx 0,01$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[-0,38; -0,37]$ بحيث

$g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2[$ فإن α وحيد.

3. إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم x .

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$

و من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ كما أن $g(\alpha) = 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2 - [e^{-x} - xe^{-x}] = 2 + e^{-x}(x - 1) = g(x)$$

2. دراسة تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن $f'(x) < 0$

و من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[$ و متزايدة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. تبين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$$

إذن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

لدينا $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه إشارة $f(x) - (2x + 1)$ هي نفس إشارة $-x$.

في المجال $]-\infty; 0[$ ، $-x > 0$ أي $f(x) - (2x + 1) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (d) .

و في المجال $]0; +\infty[$ ، $-x < 0$ أي $f(x) - (2x + 1) < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (d) .

و (C_f) يقطع (d) في النقطة $A(0; 1)$.

5. تبين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $g'(x)$.

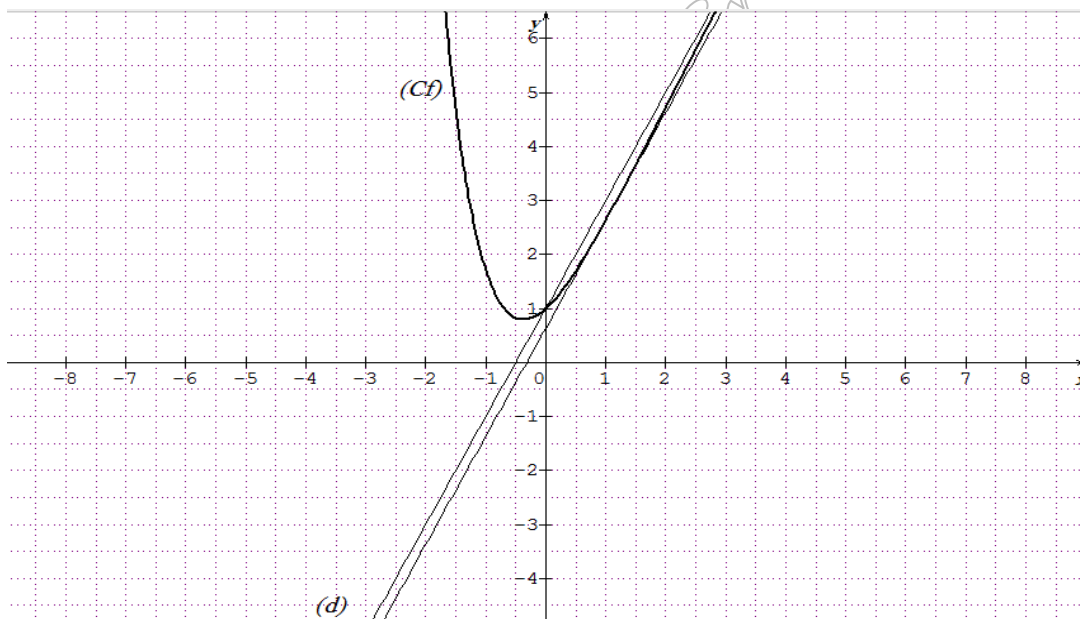
$f''(x)$ تنعدم من أجل 2 وتغير من إشارتها بجوار 2 وهذا يعني أن النقطة $B(2; f(2))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

6. تبين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$.

لدينا $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$ أي $e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{(2\alpha + 1)(\alpha - 1) + 2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1} \quad \text{إذن}$$

7. رسم (d) و (C_f)؛ نأخذ $\alpha \approx -0,375$.



III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y = 2x + \beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. تعيين β حتى يكون (Δ_β) مماساً للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x) = 2 \quad \text{معناه} \quad (x-1)e^{-x} + 2 = 2 \quad \text{يكافئ} \quad (x-1)e^{-x} = 0 \quad \text{أي} \quad x = 1$$

لدينا $f(1) = 3 - e^{-1}$ ؛

(Δ_β) مماس للمنحنى (C_f) إذا كان يشمل النقطة $A(1; 3 - e^{-1})$ ومنه $3 - e^{-1} = 2(1) + \beta$ أي $\beta = 1 - e^{-1}$

إذن من أجل $\beta = 1 - e^{-1}$ يكون (Δ_β) مماساً للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 3 - e^{-1})$.

2. المناقشة بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي β ، عدد حلول المعادلة: $-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0$

$$-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \beta = -\frac{x}{e^x} + 1 + 2x \quad \text{ومنه} \quad 2x + \beta = -xe^{-x} + 1 + 2x$$

$$\text{أي} \quad f(x) = 2x + \beta$$

إذا كان $\beta \in]-\infty; 1 - e^{-1}]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $\beta = 1 - e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً وهو 1.

إذا كان $\beta \in]1 - e^{-1}; 1]$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $\beta \in]1; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.

التمرين الحادي عشر

I - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلاً وحيداً α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا

للعدد α

(4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عيّن بيانياً مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

الحل

I - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = 2$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 2$ بجوار $-\infty$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب معادلته $x = 1$.

(2) حساب $f'(x)$. وتبين أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$.

الدالة f عبارة عن عمليات على دوال قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ فهي قابلة للإشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		—
$f(x)$	2	$-\infty$

(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2[$ و $0 \in]-\infty; 2[$ إذن المعادلة

$f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1[$.

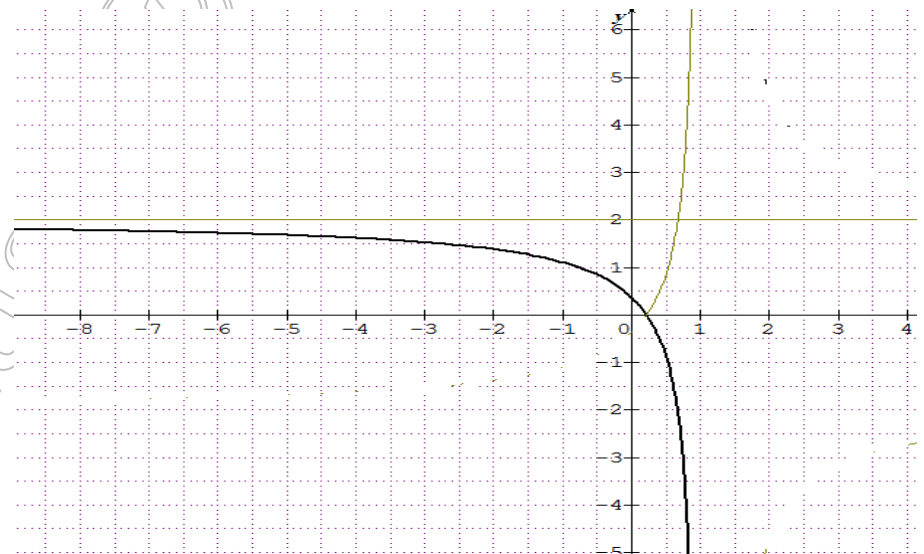
إيجاد حصرا للعدد α باستعمال جدول القيم أعلاه.

نلاحظ أن $f(0,21) \approx 0,016$ و $f(0,22) \approx -0,005$ إذن $f(0,21) \times f(0,22) < 0$ ومنه $0,21 < \alpha < 0,22$

(4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

$$\begin{cases} |f(x)| = f(x); x \in]-\infty; \alpha[\\ |f(x)| = -f(x); x \in [\alpha; 1[\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} |f(x)| = f(x); f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x); f(x) \leq 0 \end{cases}$$

إذن (C') ينطبق على (C) في المجال $]-\infty; \alpha[$ و (C') يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[\alpha; 1[$.



(5) تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة من أجل قيم m من المجال $\left[\frac{1}{e}; 2\right[$ (لاحظ أن $f(0) = \frac{1}{e}$)

II- الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) دراسة تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1) \quad ; \quad \text{نضع } t = 2x-1 \text{ لما } x \text{ يتوّل إلى } -\infty \text{ فإن } t \text{ يتوّل } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 2 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = -\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ ولدينا: $g'(x) = 2f'(2x-1)$
إذا كان $x < 1$ فإن $2x-1 < 1$ ومنه $f'(2x-1) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$
يمكن إتباع طريقة إتجاه تغير مركب دالتين.
نعتبر الدالة $u: x \mapsto 2x-1$ المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ إذن $g(x) = f[u(x)] = (f \circ u)(x)$
الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1[$ والدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$.
جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	—	
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم تبين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha+1-1) = f(\alpha) = 0$$

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = 2f'(\alpha+1-1) = 2f'(\alpha)$$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

$$y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \text{ ومنه } y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

ج) التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

$$\text{لدينا } f(\alpha) = 0 \text{ يكافئ } \frac{\alpha}{\alpha-1} + e^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0 \text{ أي } e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\text{ومنه } 2f'(\alpha) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(\frac{-1}{\alpha-1}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}$$

$$\text{إذن معادلة المستقيم } (T) \text{ هي: } y = \frac{2}{(\alpha-1)^3} \left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

التمرين الثاني عشر

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1-I. نعتبر الدالة h المعرفة على كما يلي: $h(x) = xe^x + 1$.

أ) ادرس تغيرات الدالة h .

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي $x: h(x) > 0$.

2. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x + 2 - e^x$.

(أ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha > \beta$ ثم تحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$.

(د) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II-1. احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسّر النتائج هندسياً.

2. (أ) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي $x: f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. (أ) تحقق أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

(ب) عيّن حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

4. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. (أ) تحقق أن $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ حيث $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة u ثم استنتج إشارة $u(x)$.

(ج) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

6. أرسم (T) و (C) . (نقبل أن $-1,84 < \beta < -1,85$ و $-1,18 < f(\beta) < -1,19$)

الحل ☺

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

I-1. نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = xe^x + 1$.

(أ) دراسة اتجاه تغير الدالة h .

الدالة h تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي $x: h'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي إشارة $(1+x)$ ؛ $h'(-1) = 0$.

من أجل $x \in]-\infty; -1]$ ، $h'(x) < 0$ وعليه الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$.

من أجل $x \in]-1; +\infty[$ ، $h'(x) > 0$ وعليه الدالة h متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي $x: h(x) > 0$.

لدينا الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $x = -1$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي $x: h(x) \geq h(-1)$ أي

$h(x) \geq 1 - e^{-1}$ وبالتالي $h(x) > 0$.

2. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x + 2 - e^x$.

(أ) حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

$$g'(x) = 1 - e^x$$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } 1 - e^x = 0 \text{ ويكافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$g'(x) > 0 \text{ معناه } 1 - e^x > 0 \text{ ويكافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

$$g'(x) < 0 \text{ معناه } 1 - e^x < 0 \text{ ويكافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

إذن الدالة g متزايدة تماماً على $]-\infty; 0]$ ومنتقصة تماماً على $[0; +\infty[$.

جدول التغيرات.

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	-
$g(x)$			1		

(ج) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha > \beta$

الدالة g مستمرة ومنتزيدة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1]$ و $0 \in]-\infty; 1]$ إذن المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \beta \text{ في المجال }]-\infty; 0].$$

ولدينا الدالة g مستمرة ومنتقصة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0; +\infty[$ و $0 \in [0; +\infty[$ إذن المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha \text{ في المجال } [0; +\infty[.$$

التحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$.

لدينا $g(1,14) \approx 0,013$ و $g(1,15) \approx -0,008$ أي $g(1,14) \times g(1,15) < 0$ ومنه $1,14 < \alpha < 1,15$.

(د) استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$	
$g(x)$	—	0	+	0	—

II-1. حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسّر النتائج هندسياً.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x + 1 = 1 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 - e^{-x})}{e^x (x + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0$$

$$2. \text{ أ) تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(x e^x + 1)^2}$$

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - e^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f .لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.في المجموعة $]-\infty; \beta[\cup]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ و عليه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; \beta]$ و $[\alpha; +\infty[$ وفي المجال $]\beta; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; \beta]$.
جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	β			α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$f(\beta)$		$f(\alpha)$		0	

3. أ) التحقق أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$ أي $e^\alpha = \alpha + 2$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

(ب) تعيين حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .لدينا $1,15 < \alpha < 1,14$ معناه $2,15 < \alpha + 1 < 2,14$ يكافئ $\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$ أي $0,46 < f(\alpha) < 0,47$.

4. تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

معادلة (T) هي: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = x$.

$$5. أ) التحقق أن $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ حيث $u(x) = e^x - xe^x - 1$.$$

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{-1 - x + e^x(1 - x^2)}{xe^x + 1} = \frac{-(x+1) + e^x(1+x)(1-x)}{xe^x + 1}$$

$$f(x) - x = \frac{(1+x)(e^x(1-x) - 1)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة u ثم استنتاج إشارة $u(x)$.

الدالة u تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x : $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة $-x$

من أجل $x > 0$ فإن $u'(x) < 0$ ؛ ومن أجل $x < 0$ فإن $u'(x) > 0$ و $u'(0) = 0$.

وعليه الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ ولها قيمة حدية عظمى هي $u(0) = 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $u(x) \leq 0$.

(ج) استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

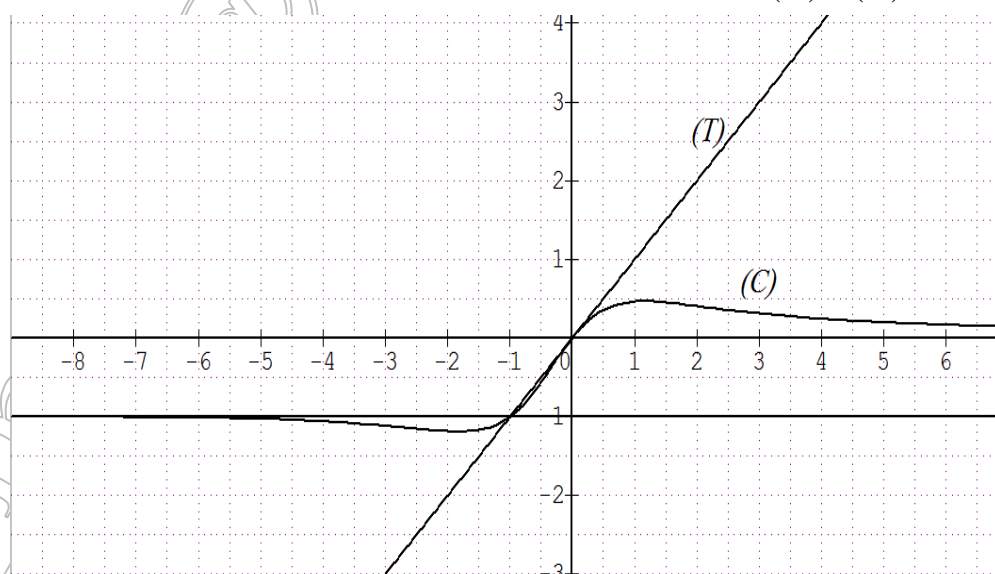
$$f(x) - x = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$		0	$+$	$+$
$u(x)$	$-$	$-$	0	$-$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	$-$

في المجال $]-\infty; -1[$ ، (C) يقع فوق (T) وفي المجال $]-1; +\infty[$ ، (C) يقع تحت (T) ويشتركان في النقطتين $A(-1; -1)$ و

O

6. رسم (T) و (C).



التمرين الثالث عشر

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسياً.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x \text{ و } y = x + 1 .$$

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4. أثبت أن $\omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

5. أ - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$.

ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج - ارسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د - ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$

الحل ☺

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0^-$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f جدول تغيراتها.

من أجل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا $e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على

مجال تعريفها.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3. أ - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مانلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x \text{ و } y = x + 1.$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته } y = x \text{ بجوار } +\infty.$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته } y = x + 1 \text{ بجوار } -\infty.$$

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

$$f(x) - x = \frac{-1}{e^x - 1} \text{ ؛ إشارة } f(x) - x \text{ هي عكس إشارة } e^x - 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	—		+
$f(x) - x$	+		—
الوضعية النسبية	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ')

$$f(x) - (x + 1) = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{-e^x}{e^x - 1}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $-e^x < 0$ ومنه إشارة $f(x) - (x + 1)$ هي عكس إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	—		+
$f(x) - (x + 1)$	+		—
الوضعية النسبية	(C_f) يقع فوق (Δ')		(C_f) يقع تحت (Δ')

4. إثبات أن $\omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

$$\omega\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ مركز تناظر إذا تحقق مايلي: من أجل } x \in \mathbb{R}^* \text{ فإن } -x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم } x : f(-x) + f(x) = 1$$

$$\text{لدينا } x \in \mathbb{R}^* \text{ معناه } x \neq 0 \text{ ومنه } -x \neq 0 \text{ أي } -x \in \mathbb{R}^*.$$

$$f(-x) + f(x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{-e^x}{1 - e^x} - \frac{1}{e^x - 1} = 1$$

$$\text{إذن } \omega\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى } (C_f).$$

5. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ وبالأخص على المجال $[-1,4; -1,3]$ ولدينا

ولدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص على المجال $[\ln 2; 1]$ و $f(\ln 2) \approx -0,3$ و $f(1) \approx 0,4$ أي $f(1) \times f(\ln 2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[\ln 2; 1]$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

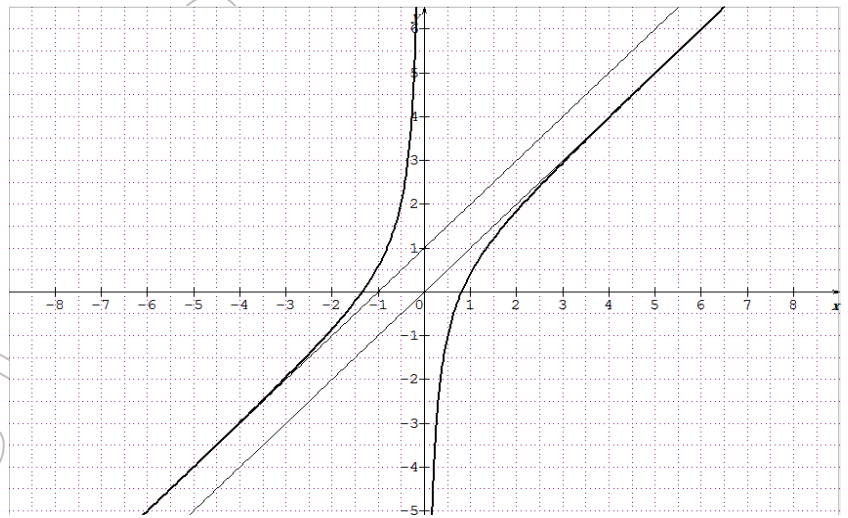
ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

المماس يوازي (Δ) معناه $f'(x_0) = 1$.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } 1 + \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0} - 1)^2} = 1 \text{ ويكافئ } \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0} - 1)^2} = 0 \text{ أي } e^{x_0} = 0 \text{ وهذا مستحيل.}$$

ومنه لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ) .

ج - رسم (Δ) ، (Δ') والمنحنى (C_f) .



د - المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$

$$(m-1)e^{-x} = m \text{ تكافئ } m-1 = me^x \text{ وتكافئ } -1 = m(e^x - 1) \text{ تكافئ } m = \frac{-1}{e^x - 1} \text{ تكافئ } x + m = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

أي $f(x) = x + m$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$

إذا كان $m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً

إذا كان $0 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m > 1$ فإن المعادلة تقبل حلاً وحيداً سالباً.

التمرين الرابع عشر ④

I - لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عيّن a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماساً موازياً لمحور الفواصل

II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بَيِّنْ أَنَّهُ، مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

2. احسب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

4. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$.

- استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

5. بَيِّنْ أَنَّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.

6. بَيِّنْ أَنَّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

7. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

III - نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$

- عَيِّنْ اتجاه تغيّر الدالة ثم شكل جدول تغيّراتها.

الحل

I - لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- تعيين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل

(C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ معناه $g(\ln 2) = \ln 2$ يكافئ $(\ln 2)a + b - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2$ ويكافئ

$(\ln 2)a + b - 2 = \ln 2$ أي $(1)(\ln 2)a + b = \ln 2 + 2$

الدالة g تقبل الإشتقاق على \mathbb{R} ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = a - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2}$

(C_g) يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه $g'(\ln 2) = 0$ ويكافئ $a - 1 = 0$ أي $a = 1$

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نجد $(1)(\ln 2) + b = \ln 2 + 2$ ومنه $b = 2$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أَنَّهُ، مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{4e^x + 8 - 4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

2. حساب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} = +\infty$$

3. دراسة اتجاه تغير الدالة f الدالة f تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}$$

إذن الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

4. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$

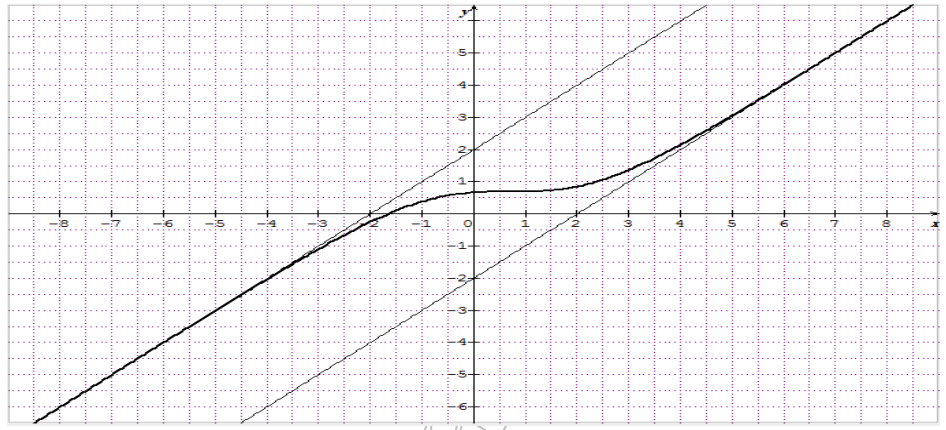
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 2} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2$$

- استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x - 2$ بجوار $+\infty$.و لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ') مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $-\infty$.5. تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.بما أن $f'(x)$ تنعدم عند العدد $\ln 2$ ولا تغير من إشارتها فإن النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .6. تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على \mathbb{R} وبالأخص على المجال $[-1,7; -1,6]$ ولدينا $f(-1,6) = 0,03$ و $f(-1,7) = -0,03$.أي $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α منالمجال $[-1,7; -1,6]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث

$$-1,7 < \alpha < -1,6$$

7. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .



III - نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

- تعيين اتجاه تغير الدالة h .

نضع $u(x) = x^2$ عندئذ $h(x) = [f(x)]^2 = u[f(x)] = (u \circ f)(x)$

لدينا $u'(x) = 2x$ ومنه $h'(x) = f'(x) \times u'(f(x)) = f'(x) \times 2f(x) = 2f'(x) \times f(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f'(x) \geq 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$	α	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+
$h'(x)$	-	0	+	+

الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغير مركب الدالتين:

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 0]$ والدالة u متناقصة تماماً على المجال

$]-\infty; 0]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$.

ولدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0; +\infty[$ والدالة u متزايدة تماماً على المجال

$[0; +\infty[$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$h(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$