

تمرين 01

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقطة $A(1; 2; -3)$ والشعاع $\vec{u}(-4; 2; 1)$

- 1- أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل A ويعامد \vec{u}
- 2- تحقق أن النقطة $C(-1; 1; 1)$ لا تنتمي إلى المستوي (P) .
- 3- احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) .
- 4- احسب المسافة بين النقطة $D(1; 0; 1)$ والمستوي (P) ماذا تستنتج ؟

الحل

1. كتابة معادلة المستوي (P) الذي يشمل A ويعامد \vec{u}

للمستوي (P) معادلة من الشكل $-4x + 2y + z + d = 0$ وبما أن $A \in (P)$ فإن $-4 + 4 - 3 + d = 0$ ومنه $d = 3$ وعليه معادلة المستوي (P) هي $-4x + 2y + z + 3 = 0$.

2. التحقق أن النقطة $C(-1; 1; 1)$ لا تنتمي إلى المستوي (P) .

لدينا $-4x_C + 2y_C + z_C + 3 = -4 + 2 + 1 + 3 = 10 \neq 0$ ومنه النقطة C لا تنتمي للمستوي (P) .

3. حساب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) .

$$d(C; (P)) = \frac{|-4x_C + 2y_C + z_C + 3|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{21}}$$

4- حساب المسافة بين النقطة $D(1; 0; 1)$ والمستوي (P) ماذا تستنتج ؟

$$d(D; (P)) = \frac{|-4(1) + 2(0) + 1 + 3|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$$

و نستنتج أن النقطة D تنتمي للمستوي (P) .

تمرين 02

يعطى المستويان (P_1) و (P_2) بمعادلتيهما: $x - 2y + 3z - 4 = 0$ و $-2x + 3y - z + 2 = 0$

- هل المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ؟ في حالة تقاطعهما عيّن التمثيل الوسيطى لمستقيم التقاطع

الحل

يعطى المستويان (P_1) و (P_2) بمعادلتيهما: $x - 2y + 3z - 4 = 0$ و $-2x + 3y - z + 2 = 0$

- هل المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ؟

لدينا $\vec{n}(1; -2; 3)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_1) و $\vec{n}'(-2; 3; -1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_2) .

ولدينا $\frac{-2}{1} \neq \frac{3}{-2}$ منه الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا إذن المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان حسب مستقيم (d)

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (d) .

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ -2x + 3y - z + 2 = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

المستقيم (d) معرف بالجملة التالية

بضرب المعادلة (1) بالعدد 2 وجمع المعادلتين نجد $-y + 5z - 6 = 0$ ومنه $y = 5z - 6$

وبتعويض في المعادلة (1) نجد $x - 2(5z - 6) + 3z - 4 = 0$ ومنه $x - 7z + 8 = 0$ أي $x = 7z - 8$

$$\text{وبوضع } z=t \text{ نجد } \begin{cases} x=7t-8 \\ y=5t-6 \\ z=t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

تمرين 03

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(-1; -1; -1), B(2; 3; -2), C(-1; 3; -1) \text{ والشعاع } \vec{u}(-1; -2; -3).$$

(1) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (OAB) .

(2) عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويكون \vec{u} شعاعاً ناظماً له.

(3) عيّن نقط تقاطع المستوي (OAB) والمستوي (P) .

الحل

(1) كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستوي (OAB) .

لدينا $\vec{OA}(-1; -1; -1)$ ، $\vec{OB}(2; 3; -2)$ ومنه الشعاعان \vec{OA} و \vec{OB} غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقط

A ، B و C تعين مستويًا (OAB) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (OAB)$ يعني $\vec{OM} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

$$\text{ومنه } \begin{cases} x = -\alpha + 2\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = -\alpha - 2\beta \end{cases} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ وسيطان حقيقيان.}$$

(2) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويكون \vec{u} شعاعاً ناظماً له.

المستوي (P) له معادلة من الشكل $-x - 2y - 3z + d = 0$ ولدينا $C \in (P)$ تعني $1 - 6 + 3 + d = 0$ أي $d = 2$

وعليه معادلة المستوي (P) هي $-x - 2y - 3z + 2 = 0$.

(3) تعيين نقط تقاطع المستوي (OAB) والمستوي (P) .

$$\begin{cases} x = -\alpha + 2\beta \dots\dots\dots(1) \\ y = -\alpha + 3\beta \dots\dots\dots(2) \\ z = -\alpha - 2\beta \dots\dots\dots(3) \\ -x - 2y - 3z + 2 = 0 \dots\dots(4) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

نعوض كل من المعادلة (1) و (2) و (3) في المعادلة (4) نجد $\alpha - 2\beta + 2\alpha - 6\beta + 3\alpha + 6\beta + 2 = 0$

$$\text{ومنه } 6\alpha - 2\beta + 2 = 0 \text{ أي } \beta = 3\alpha + 1 \text{ وعليه } \begin{cases} x = -\alpha + 2(3\alpha + 1) \\ y = -\alpha + 3(3\alpha + 1) \\ z = -\alpha - 2(3\alpha + 1) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 5\alpha + 2 \\ y = 8\alpha + 3 \\ z = -7\alpha - 2 \end{cases} \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي}$$

وهو تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع.

تمرين 04 (بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، المستوي (P) الذي يشمل

النقطة $A(1; -2; 1)$ و $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاعاً ناظماً له ؛ وليكن (Q) المستوي ذا المعادلة $x + 2y - 7 = 0$.

1. أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
2. أ. تحقق أن النقطة $B(-1; 4; -1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .
ب. بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلاً وسيطياً له.
3. لتكن النقطة $C(5; -2; -1)$
أ. أحسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) ، ثم المسافة بين النقطة C والمستوي (Q) .
ب. اثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.
ج. استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ) .

الحل

1. كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
المستوي (P) له معادلة من الشكل $-2x + y + 5z + d = 0$ ولدينا $A \in (P)$ يعني $-2 - 2 + 5 + d = 0$ أي $d = -1$ وبالتالي $-2x + y + 5z - 1 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
2. أ. التحقق أن النقطة $B(-1; 4; -1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .
لدينا $B \in (P)$ ومنه $-2x_B + y_B + 5z_B - 1 = 2 + 4 - 5 - 1 = 0$
و لدينا $B \in (Q)$ ومنه $x_B + 2y_B - 7 = -1 + 8 - 7 = 0$
ب. تبين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلاً وسيطياً له.
لدينا $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(1; 2; 0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) و $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2}$ ومنه الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .
تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) .
لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M \in (\Delta)$ فإن إحداثياتها تحقق الجملة

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ -2x + y + 5z - 1 = 0 \end{cases} \text{ وبوضع } y = t$$

تصبح الجملة $\begin{cases} x + 2t - 7 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ -2x + t + 5z - 1 = 0 \dots\dots(2) \end{cases}$ من (1) نجد $x = -2t + 7$ وبالتعويض في (2) نجد

$$-2(-2t + 7) + t + 5z - 1 = 0 \text{ ومنه } z = -t + 3 \text{ إذن } (\Delta): \begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases} \text{ حيث } t \text{ وسيط حقيقي.}$$

3. لتكن النقطة $C(5; -2; -1)$

أ. حساب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) ، ثم المسافة بين النقطة C والمستوي (Q) .

$$d(C; (Q)) = \frac{|5 + 2(-2) - 7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} ; d(C; (P)) = \frac{|-2(5) - 2 + 5(-1) - 1|}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

ب. اثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

لدينا $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = 0$ ومنه $\vec{n} \perp \vec{n}'$ وبالتالي المستويان (P) و (Q) متعامدان.

ج. استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ)

المستويان (P) و (Q) متعامدان ومنه حسب نظرية فيثاغورس $d^2(C; (\Delta)) = d^2(C; (P)) + d^2(C; (Q))$

$$d(C;(\Delta)) = \sqrt{d^2(C;(P)) + d^2(C;(Q))} = \sqrt{\frac{270}{25} + \frac{180}{25}} = \sqrt{\frac{450}{5}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ ومنه}$$

تمرين 05 (بكالوريا علوم تجريبية 2014)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط:

$$A(-1; 1; 3), B(1; 0; -1), C(2; -1; 1), D(2; 0; -1) \text{ والمستوي } (P) \text{ ذا المعادلة: } 2y + z + 1 = 0.$$

$$\text{ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \text{ حيث } \beta \text{ وسيط حقيقي.}$$

(1) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BC) ؛ ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوًى في المستوي (P) .

(2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

(3 أ) احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P) .

ب) بين أن D نقطة من (P) ؛ وأن المثلث BCD قائم.

(4) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثم احسب حجمه.

الحل ☺

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط:

$$A(-1; 1; 3), B(1; 0; -1), C(2; -1; 1), D(2; 0; -1) \text{ والمستوي } (P) \text{ ذا المعادلة: } 2y + z + 1 = 0.$$

$$\text{ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \text{ حيث } \beta \text{ وسيط حقيقي.}$$

(1) كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BC) .

لدينا $\overrightarrow{BC}(1; -1; 2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) .

من أجل نقطة $M(x; y; z)$ من المستقيم (BC) لدينا $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\text{ومنه } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

التحقق أن المستقيم (BC) محتوًى في المستوي (P) .

$$\text{لدينا } 2y_B + z_B + 1 = 2(0) - 1 + 1 = 0 \text{ ومنه } B \in (P)$$

$$\text{ولدينا } 2y_C + z_C + 1 = 2(-1) + 1 + 1 = 0 \text{ ومنه } C \in (P) \text{ وبالتالي المستقيم } (BC) \text{ محتوًى في المستوي } (P).$$

(2) تبين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{BC}(1; -1; 2) \text{ شعاع توجيه للمستقيم } (BC) \text{ و } \vec{u}(0; 1; -2) \text{ شعاع توجيه للمستقيم } (\Delta).$$

$$\text{و } \frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1} \text{ ومنه الشعاعان } \overrightarrow{BC} \text{ و } \vec{u} \text{ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان } (\Delta) \text{ و } (BC) \text{ غير متوازيين}$$

ندرس التقاطع

$$\begin{cases} -1 = 1 + t \dots\dots\dots (1) \\ 2 + \beta = -t \dots\dots\dots (2) \\ 1 - 2\beta = 1 + 2t \dots\dots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $t = -2$ بالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases} -1 = -1 \\ 2 + \beta = 2 \\ 1 - 2\beta = -5 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = 3 \end{cases}$ وهذا تناقض

إذن (Δ) و (BC) غير متقاطعين وبالتالي فهما ليسا من نفس المستوي.

(3 أ) حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (P) .

$$d(A; (P)) = \frac{|2(1) + 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

ب) تبين أن D نقطة من (P) ؛ وأن المثلث BCD قائم.

لدينا $2y_D + z_D + 1 = 2(0) - 1 + 1 = 0$ ومنه $D \in (P)$

ولدينا $\overrightarrow{BC}(1; -1; 2)$ ، $\overrightarrow{BD}(1; 0; 0)$ و $\overrightarrow{CD}(0; 1; -2)$ إذن $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \times 1 + 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$ ومنه $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BD}$ وبالتالي المثلث BCD قائم في D .

(4) تبين أن $ABCD$ رباعي وجوه.

بما أن $d(A; (P)) \neq 0$ فإن $A \notin (P)$ ومنه $ABCD$ رباعي وجوه (لأن المستوي (BCD) هو المستوي (P)) حساب حجمه.

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} S(BCD) \times d(A; (P))$$

لدينا $S(BCD) = \frac{BD \times CD}{2}$ و $BD = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$ و $CD = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

ومنه $S(BCD) = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} ua$ وعليه $V(ABCD) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 1uv$

تمرين 06

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ،

نعتبر النقط $D(2; 1; 5)$ ، $C(2; 3; 3)$ ، $B(-1; 4; 1)$ ، $A(1; 0; -1)$

1- بين أن الشعاع $\vec{u}(-1; -1; 1)$ عمودي على المستوي (ABC) .

2- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3- بين أن $ABCD$ هو رباعي أوجه.

4- احسب مساحة المثلث ABC .

5- احسب المسافة d بين النقطة D والمستوي (ABC) .

6- احسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

الحل

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ،

نعتبر النقط $D(2; 1; 5)$ ، $C(2; 3; 3)$ ، $B(-1; 4; 1)$ ، $A(1; 0; -1)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2; 4; 2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1; 3; 4)$ و $\frac{2}{1} \neq \frac{4}{3}$ ومنه الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطياً وبالتالي

النقط A ، B و C تعين مستويًا.

1- تبين أن الشعاع $\vec{u}(-1; -1; 1)$ عمودي على المستوي (ABC) .

لدينا $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -1(-2) - 1(4) + 1(2) = 0$ و $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = -1(1) - 1(3) + 1(4) = 0$ ومنه الشعاع \vec{u} عمودي على

كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وبالتالي الشعاع \vec{u} عمودي على المستوي (ABC) .

2- استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

للمستوي (ABC) معادلة من الشكل $-x - y + z + d = 0$ ولدينا $A \in (ABC)$ تعني $-1 - 1 + d = 0$ ومنه $d = 2$ وعليه $-x - y + z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3- تبين أن $ABCD$ هو رباعي أوجه.

بما أن $-x_D - y_D + z_D + 2 = -2 - 1 + 5 + 2 = 4 \neq 0$ فإن النقطة D خارجة عن المستوي (ABC) ومنه $ABCD$ هو رباعي أوجه.

4- حساب مساحة المثلث ABC .

لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) عندئذ $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}| = AB \cdot AH$

ولدينا من جهة أخرى $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = |-2(1) + 4(3) + 2(4)| = 18$ و $AB = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{24}$ وعليه $18 = \sqrt{24}AH$ إذن $AH = \frac{18}{\sqrt{24}}$

لدينا في المثلث ACH القائم في H : $AH^2 + CH^2 = AC^2$ ومنه $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2}$

حيث $AC^2 = (1)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 26$ و $AH^2 = \frac{324}{24}$ ومنه $CH = \sqrt{26 - \frac{324}{24}} = \sqrt{\frac{300}{24}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

إذن $S(ABC) = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}ua$

5- حساب المسافة d بين النقطة D والمستوي (ABC) .

$$d = \frac{|-2 - 1 + 5 + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

6- حساب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} \times 5\sqrt{3} \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}uv \text{ ومنه } V(ABCD) = \frac{1}{3}S(ABC) \times d$$

تمرين 07

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(3; -1; 2)$ ، $B(4; -1; -1)$ ، $C(2; 0; 2)$.

1) أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - بين أن الشعاع $\vec{n}(3; 3; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

2) ليكن المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية $x + y - 1 = 0$.

أ - بين أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان.

ب - عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

3) أ - احسب المسافة بين O والمستقيم (Δ) .

ب - استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها O والمماس للمستقيم (Δ) .

الحل

أ - إثبات أن النقط A ، B و C تعين مستويا: لدينا $\overrightarrow{AB}(1; 0; -3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1; 1; 0)$

ومنه إحداثيات الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير متناسبة وعليه الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا وبالتالي فإن النقط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستويا وحيدا.

ب - إثبات أن \vec{n} شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

$$\text{لدينا } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(1) + 3(0) + 1(-3) = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-1) + 3(1) + 1(0) = 0$$

ومنه الشعاع \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وعليه فإن الشعاع \vec{n} ناظمي للمستوي (ABC) .
تعيين معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $3x + 3y + z + d = 0$ ولدينا C تنتمي للمستوي (ABC) يعني $3(2) + 3(0) + 2 + d = 0$ ومنه $d = -8$ وبالتالي معادلة المستوي (ABC) هي: $3x + 3y + z - 8 = 0$.

أ - إثبات أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان.

$$\text{لدينا } \vec{n}(3;3;1) \text{ شعاعا ناظميا للمستوي } (ABC) \text{ و } \vec{n}'(1;1;0) \text{ شعاعا ناظميا للمستوي } (P)$$

ومنه الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا وعليه فإن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان

ب - تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

$$\begin{cases} 3x + 3y + z - 8 = 0 \dots (1) \\ x + y - 1 = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ المستقيم } (\Delta) \text{ معرّف بالجملة التالية:}$$

من المعادلة (2) نجد: $x = 1 - y$.

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \\ z = 5 \end{cases} \text{ وبتعويض قيمة } x \text{ في (1) نجد } 3(1-y) + 3y + z - 8 = 0 \text{ ومنه } z = 5 \text{ وعليه}$$

$$\text{وبوضع } y = t \text{ نجد: } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} \text{ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

أ - حساب المسافة بين النقطة O و (Δ) .

لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على (Δ) ومنه $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$

لدينا H تنتمي للمستقيم (Δ) إذن $H(1-t; t; 5)$ و $\overrightarrow{OH}(1-t; t; 5)$.

ولدينا $\vec{u}(-1; 1; 0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OH} = 0 \text{ معناه } (-1)(1-t) + t + 0(5) = 0 \text{ ومنه } t = \frac{1}{2} \text{ وعليه } H\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 5\right)$$

$$d(O; (\Delta)) = OH = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (5 - 0)^2} = \frac{\sqrt{102}}{2}$$

ب - استنتاج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها O والمماسة للمستقيم (Δ) .

$$\text{معادلة سطح الكرة هي } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{102}{4} \text{ أي } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{51}{2}$$

تمرين 08

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$x - y + z - 11 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يمسّ سطح الكرة (S) ذات المركز $A(1; -1; 3)$.

- 1- جد نصف قطر سطح الكرة (S) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية لـ (S) .
- 2- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A والعمودي على (P) .
- 3- لتكن النقطة H نقطة تماس (S) والمستوي (P) ؛ عيّن احداثيات H .
- 4- عيّن احداثيات النقط المشتركة بين (S) وحامل محور الفواصل.
- 5- المستويان (P_1) و (P_2) معادلتيهما على الترتيب: $x - y - 2z - 3 = 0$ و $2x + y - z - 2 = 0$.
- جد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3; -6; 2)$ والعمودي على المستويين (P_1) و (P_2) .

الحل

$x - y + z - 11 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يمسّ سطح الكرة (S) ذات المركز $A(1; -1; 3)$.

1- إيجاد نصف قطر سطح الكرة (S) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية لـ (S) .

$$\text{لدينا } d(A; (P)) = \frac{|1 + 1 + 3 - 11|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ فإن نصف قطر السطح } (S) \text{ هو } R = 2\sqrt{3}$$

وبالتالي المعادلة الديكارتية للسطح (S) هي $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 12$.

2- إيجاد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A والعمودي على (P) .

لدينا $\vec{n}(1; -1; 1)$ شعاعاً ناظماً للمستوي (P) وبما أنّ (d) عمودي على (P) فإنّ \vec{n} موجه للمستقيم (d) .

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي؛ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم } (d).$$

3- لتكن النقطة H نقطة تماس (S) والمستوي (P) ؛ تعيين احداثيات H .

H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (d) والمستوي (P) .

لدينا $H \in (d)$ معناه $H(1+t; -1-t; 3+t)$ ولدينا $H \in (P)$ معناه $x_H - y_H + z_H - 11 = 0$ ومنه

$$1+t - (-1-t) + 3+t - 11 = 0 \text{ ومنه } 3t - 6 = 0 \text{ أي } t = 2 \text{ وبالتالي فإن } H(3; -3; 5).$$

4- تعيين احداثيات النقط المشتركة بين (S) وحامل محور الفواصل.

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 12 \dots (1) \\ y = 0 \dots (2) \\ z = 0 \dots (3) \end{cases} \text{ نحل الجملة } \begin{cases} \text{بتعويض كل من } y \text{ و } z \text{ في (1) نجد} \end{cases}$$

$$(x - 1)^2 + (0 + 1)^2 + (0 - 3)^2 = 12 \text{ ومنه } (x - 1)^2 = 2 \text{ أي } x = \sqrt{2} + 1 \text{ أو } x = -\sqrt{2} + 1$$

$$\text{إذن } (x; y; z) \in \{(\sqrt{2} + 1; 0; 0); (-\sqrt{2} + 1; 0; 0)\} \text{ ومنه } (S) \cap (Ox) = \{I(\sqrt{2} + 1; 0; 0); I'(-\sqrt{2} + 1; 0; 0)\}$$

5- المستويان (P_1) و (P_2) معادلتيهما على الترتيب: $x - y - 2z - 3 = 0$ و $2x + y - z - 2 = 0$.

- إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3;-6;2)$ والعمودي على المستويين (P_1) و (P_2) .
لدينا $\vec{n}_1(1;-1;-2)$ شعاع ناظم للمستوي (P_1) و $\vec{n}_2(2;1;-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P_2) . وهما شعاعي توجيه للمستوي (Q) العمودي على المستويين (P_1) و (P_2) .

$$\begin{cases} a-b-2c=0 \dots\dots\dots (1) \\ 2a+b-c=0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \text{ عندئذ } \vec{u}(a;b;c) \text{ شعاعا ناظما للمستوي } (Q)$$

بجمع المعادلتين نجد $3a-3c=0$ ومنه $a=c$ بالتعويض في (2) نجد $2c+b-c=0$ ومنه $b=-c$ نأخذ مثلا $c=1$ نجد $\vec{u}(1;-1;1)$ ومنه للمستوي (Q) معادلة من الشكل $x-y+z+d=0$ ولدينا $B \in (Q)$ تعني $3+6+2+d=0$ أي $d=-11$ وعليه $x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) وعليه $(Q)=(P)$.

تمرين 09 ☺ (بكالوريا تقني رياضي 2010)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

1. أكتب معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي له.

2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1) .

أ - بين أن $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

ب - أكتب معادلة للمستوي (P_2) .

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C(6;1;5)$ و D معرفة بـ: $\vec{CD}(0;-3;-6)$.

أ - بين أن المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته.

ب - بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD) .

ج - أحسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

الحل ☺

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

1. كتابة معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي له.

المستوي (P_1) له معادلة من الشكل $x-z+d=0$ ولدينا $A \in (P_1)$ تعني $3-2+d=0$ أي $d=-1$ وعليه

$x-z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P_1) .

2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1) .

أ - تبين أن $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

لدينا $\vec{AB}(-3;6;-3)$ و \vec{u} شعاعي توجيه للمستوي (P_2) وهما غير مرتبطين خطيا لأنّ يحوي المستقيم (AB) ويعامد

المستوي (P_1) ولدينا $\vec{v} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$ و $\vec{v} \cdot \vec{AB} = 1 \times (-3) + 1 \times 6 + 1 \times (-3) = 0$

ومنه $\vec{v} \perp \vec{AB}$ و $\vec{v} \perp \vec{u}$ أي شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

ب - كتابة معادلة للمستوي (P_2) .

المستوي (P_2) له معادلة من الشكل $x+y+z+d=0$ ولدينا $B \in (P_2)$ تعني $0+4-1+d=0$ أي $d=3$

وبالتالي $x + y + z - 3 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (P_2) .

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C(6;1;5)$ و $D(0;-3;-6)$ معرفة بـ: \overline{CD} .

أ - تبين أن المثلث ACD قائم في A

نضع $D(x';y';z')$ ومنه $\overline{CD}(x'-6;y'-1;z'-1)$ ولدينا $\overline{CD}(0;-3;-6)$ إذن $x'-6=0$ ، $y'-1=-3$ ،

$z'-5=-6$ أي $z'=1$ ، $x'=6$ ، $y'=-2$ و $z'=-1$ وعليه $D(6;-2;-1)$

لدينا $\overline{AC}(3;3;3)$ ، $\overline{AD}(3;0;-3)$ و $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 0$ وهذا يعني أن $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A .

حساب مساحته.

$$S(ACD) = \frac{\overline{AC} \times \overline{AD}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2} \text{ ua}$$

ب - تبين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD) .

لدينا $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3 \times 3 + 6 \times 3 - 3 \times 3 = 0$ و $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = -3 \times 3 + 6 \times 0 - 3 \times (-3) = 0$ وهذا يعني $\overline{AB} \perp \overline{AC}$

و $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ ومنه \overline{AB} شعاع ناظمي للمستوي (ACD) وبالتالي المستقيم (AB) يعامد المستوي (ACD)

ج - حساب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

بما أن (AB) يعامد المستوي (ACD) فإن A هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (ACD)

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} S(ACD) \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27 \text{ uv}$$

تمرين 10

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ ، $D(0;4;-1)$.

(1) بين أن المثلث ABC قائم في A .

(2) أكتب معادلة المستوي (P_1) الذي يشمل A ويعامد المستقيم (AC) .

(3) بين أن المستوي (P_2) ذا المعادلة: $x + y + z - 3 = 0$ يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (AB) .

(4) أ) أكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها $R = 5\sqrt{3}$

ب) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة L حيث $L = (S) \cap (P_2)$.

(5) أ) احسب الجداءين السلميين الآتيين: $\overline{AD} \cdot \overline{AB}$ و $\overline{AD} \cdot \overline{AC}$ ، ثم استنتج أن المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC)

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل

1 إثبات أن المثلث ABC قائم في A .

لدينا $\overline{AB}(3;3;3)$ و $\overline{AC}(3;0;-3)$ و $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3(3) + 0(3) + (-3)(3) = 0$

أي أن $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A .

2 معادلة المستوي (P_1) الذي يشمل A ويعامد المستقيم (AC) .

بما أن $\overline{AC}(3;0;-3)$ فإن المستوي (P_1) معادلته من الشكل: $3x - 3z + d = 0$ وبما أن (P_1) يشمل النقطة A فإن

$$3(3) - 3(2) + d = 0 \text{ ومنه } d = -3 \text{ وعليه } (P_1): 3x - 3z - 3 = 0$$

(3) إثبات أن المستوى (P_2) ذا المعادلة: $x + y + z - 3 = 0$ يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (AB) .

لدينا $x_A + y_A + z_A - 3 = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$ ومنه (P_2) يشمل النقطة A .

ولدينا $\overrightarrow{n_{P_2}}(1;1;1)$ و $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$ ومنه \overrightarrow{AB} مرتبطان خطيا إذن \overrightarrow{AB} شعاع ناظمي

للمستوي (P_2) وبالتالي المستوى (P_2) يعامد المستقيم (AB) .

(4 أ) كتابة معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها $R = 5\sqrt{3}$

$$(S): (x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 75$$

(ب) تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة L حيث $L = (S) \cap (P_2)$.

$$d = \frac{|6+1+5-3|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \text{ هو } (P_2) \text{ عن النقطة } B$$

و $d < 5\sqrt{3}$ وعليه (P_2) يقطع (S) في دائرة مركزها A المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P_2)

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{75 - 27} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ ومنه } r^2 + d^2 = R^2 \text{ حيث } r \text{ نصف قطرها}$$

$$(5 أ) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3(3) + 6(3) - 3(3) = 0 \text{ و } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3(3) + 6(0) - 3(-3) = 0$$

ومنه الشعاع \overrightarrow{AD} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وعليه الشعاع \overrightarrow{AD} ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) .

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

بما أن المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) فإن A هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AD \text{ يعطى كما يلي}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2} ua \text{ وبالتالي مساحته هي}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv \text{ وعليه } AD = 3\sqrt{6}$$

تمرين 11

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط:

$$C(0; -1; 2), B(2; 1; 3), A(-1; 2; 1)$$

ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $AM = BM$.

1- بين أن (P) هو المستوي الذي معادلته $3x - y + 2z - 4 = 0$.

2- عيّن معادلة المستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P) .

3- أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) .

(ب) عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

(ج) احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

4- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P') الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، ثم استنتج معادلة له.

الحل

1- إثبات أن (P) هو المستوي الذي معادلته $3x - y + 2z - 4 = 0$.

$$AM = BM \text{ معناه } \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (y-3)^2}$$

$$\text{وتكافئ } (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (y-3)^2$$

وبعد التبسيط نجد $3x - y + 2z - 4 = 0$ وبالتالي $3x - y + 2z - 4 = 0$ هي معادلة للمستوي (P) .

2- تعيين معادلة المستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P) .

بما المستوي (Q) يوازي (P) فإن معادلته تكون من الشكل: $3x - y + 2z + d = 0$

وبما أن A نقطة من (Q) فإن $3(-1) - 2 + 2(1) + d = 0$ ومنه $d = 3$

وعليه $3x - y + 2z + 3 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (Q)

3- أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) .

لدينا $\vec{n}(3; -1; 2)$ شعاعا ناظما للمستوي (P) وبما أن المستقيم (D) يعامد (P) فإن

الشعاع $\vec{n}(3; -1; 2)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (D) ولدينا $C \in (D)$.

من أجل كل $M(x; y; z)$ من (D) لدينا: $\vec{CM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي و $\vec{CM}(x; y+1; z-2)$.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y + 1 = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z - 2 = 2t \end{cases}$$

ب) تعيين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

$$\begin{cases} x = 3t \dots\dots\dots(1) \\ y = -1 - t \dots\dots\dots(2) \\ z = 2 + 2t \dots\dots\dots(3) \\ 3x - y + 2z + 3 = 0 \dots\dots\dots(4) \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

وبتعويض كلا من (1) و (2) و (3) في (4) نجد: $3(3t) - (-1 - t) + 2(2 + 2t) + 3 = 0$

$$\text{ومن } 14t + 8 = 0 \text{ أي } t = -\frac{4}{7} \text{ إذن } \begin{cases} x = -\frac{12}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \\ z = \frac{6}{7} \end{cases} \text{ إذن } E\left(-\frac{12}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$$

ج) حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

لدينا المستقيم (D) يعامد المستوي (P) والمستويان (P) و (Q) متوازيان إذن (D) يعامد (Q) .

ولدينا $A \in (Q)$ إذن المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) هي النقطة E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

وعليه المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي الطول AE .

$$AE = \sqrt{\left(-\frac{12}{7} + 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{6}{7} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{315}}{7}$$

4- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P') الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P).

لدينا (P') يحوي المستقيم (AC) إذن \overrightarrow{AC} شعاع توجيه للمستوي (P').

ولدينا (P') يعامد المستوي (P) إذن الشعاع \overrightarrow{AB} الناطمي للمستوي (P) يكون شعاع توجيه ثان للمستوي (P') و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} غير مرتبطين خطيا.

وعليه من أجل كل $M(x; y; z)$ من (P') لدينا: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} / ((t, k) \in \mathbb{R}^2)$.

$$\begin{cases} x = 3t + k - 1 \\ y = -t - 3k + 2 \\ z = 2t + k + 1 \end{cases} \text{ ومنه حيث } t \text{ و } k \text{ عدنان حقيقيان.}$$

استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (P').

$$\begin{cases} x = 3t + k - 1 \dots\dots\dots(1) \\ y = -t - 3k + 2 \dots\dots\dots(2) \\ z = 2t + k + 1 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

من (1) نجد: $k = x - 3t + 1$ وبتعويض k بقيمتها في (2) و (3) نجد:

$$\begin{cases} k = x - 3t + 1 \dots\dots\dots(4) \\ y = -3x + 8t - 1 \dots\dots\dots(5) \text{ ومنه } z = 2t + (x - 3t + 1) + 1 \text{ و } y = -t - 3(x - 3t + 1) + 2 \\ z = x - t + 2 \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

من (6) نجد: $t = x - z + 2$ وبتعويض t بقيمتها في (5) نجد: $y = -3x + 8(x - z + 2) - 1$ وعليه $5x - y - 8z + 15 = 0$ هي معادلة للمستوي (P').

تمرين 12

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط:

$$C(0; 0; 2), B(0; 1; 0), A(2; 0; 0)$$

1- بين أن النقط A, B, C ليست في استقامية.

2- جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

4- المستوي الذي معادلته $2x + 2y + z - 2 = 0$.

أ) بين أن (P) و (ABC) متقاطعان.

ب) بين أن النقط B والنقط C تنتميان إلى (P) ماذا تستنتج؟

5- عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$

الحل

1- إثبات أن النقط A, B, C ليست في استقامية.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; 0; 2)$ و $\frac{-2}{-2} \neq \frac{0}{1}$ إذن الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A, B, C ليست في استقامية.

2- معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

$$\text{ليكن } \vec{n}(a;b;c) \text{ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذن } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} -2a+b=0 \\ -2a+2c=0 \end{cases}$$

ومنه $b=2a$ و $c=a$ نأخذ مثلا $a=1$ نجد $b=2$ و $c=1$ وعليه $\vec{n}(1;2;1)$.

إذن المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $x+2y+z+d=0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (ABC) فإن $2+d=0$ ومنه $d=-2$ وبالتالي: $x+2y+z-2=0$ هي معادلة للمستوي (ABC).

3- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

المستقيم (BC) شعاع توجيهه هو $\vec{BC}(0;-1;2)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (BC) لدينا: $\vec{BM} = t\vec{BC} / t \in \mathbb{R}$ و $\vec{BM} = (x;y-1;z)$.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1-t; (t \in \mathbb{R}) \\ z=2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x=0 \\ y-1=-t \\ z=2 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=0 \\ y-1=-t \\ z=2 \end{cases}$$

أ) إثبات أن (P) و (ABC) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(1;2;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(2;2;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P).

$\frac{2}{1} \neq \frac{2}{1}$ إذن إحداثيات الشعاعين \vec{n} و \vec{n}' غير متناسبة ومنه الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (ABC) متقاطعان.

ب) إثبات أن النقطة B والنقطة C تنتميان إلى (P).

بتعويض إحداثيات النقطتين B و C في المستوي (P) نجد:

$$2(0)+2(1)+0-2=0 \text{ ومنه النقطة B تنتمي للمستوي (P).}$$

$$2(0)+2(0)+2-2=0 \text{ ومنه النقطة C تنتمي للمستوي (P).}$$

بما أن النقطتين B و C تنتميان للمستوي (P) فإن (BC) محتو في المستوي (P) وكذلك المستقيم (BC) محتو في المستوي (ABC).

نتيجة: المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان في المستقيم (BC).

5- تعيين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$

لتكن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC

لدينا من أجل كل نقطة M من الفضاء $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

$$\begin{aligned} 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} &= 2\vec{MA} - (\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC}) \\ &= -\vec{AB} - \vec{AC} \end{aligned}$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \text{ تكافئ } \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-\vec{AB} - \vec{AC}\|$$

$$\text{أي } 3\vec{MG} = \|\vec{AB} + \vec{AC}\| \text{ ولدينا } \vec{AB}(-2;1;0) \text{ و } \vec{AC}(-2;0;2)$$

$$\text{ومنه } (\vec{AB} + \vec{AC})(-4;1;2) \text{ وعليه } \|\vec{AB} + \vec{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1 + 2^2} = \sqrt{21}$$

$$\text{ومنه } 3\vec{MG} = \sqrt{21} \text{ أي } \vec{MG} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

وبالتالي مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها النقطة G وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

تمرين 13

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(1; 4; 1)$ ، $B(0; 2; 1)$ و $C(1; 6; 0)$.

- 1- أ - بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.
ب - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- 2- ليكن سطح الكرة (S) التي مركزها $\omega(1; 1; 1)$ ونصف قطرها 3.
أ - أكتب معادلة سطح الكرة (S) .
ب - أحسب $d(\omega; (ABC))$.

- 3- عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) المار من ω والعمودي على (ABC) .
- 4- بين أن المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) ، عيّن مركزها ونصف قطرها.

الحل

1- أ - إثبات أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 0)$ و $\overrightarrow{AC}(0; 2; -1)$ و $\frac{0}{1} \neq \frac{2}{-2}$ إذن الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين

خطياً ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

$$\text{ليكن } \vec{n}(a; b; c) \text{ شعاعاً ناظماً للمستوي } (ABC) \text{ إذن } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} -a - 2b = 0 \dots\dots (1) \\ 2b - c = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

وهي جملة معادلتين بثلاث مجاهيل فهي تقبل عدد غير منته من الحلول.

من (2) نجد $c = 2b$ ومن (1) نجد $a = -2b$ وعليه $\vec{n}(-2b; b; 2b)$ نأخذ مثلاً $b = 1$ ومنه $\vec{n}(-2; 1; 2)$.

ومن معادلة المستوي (ABC) من الشكل $-2x + y + 2z + d = 0$ وبما أن نقطة B

من (ABC) فإن $2 + 2 + d = 0$ ومنه $d = -4$ وعليه $-2x + y + 2z - 4 = 0$: (ABC) .

2- ليكن سطح الكرة (S) التي مركزها $\omega(1; 1; 1)$ ونصف قطرها 3.

أ - كتابة معادلة سطح الكرة (S) .

إذا كانت $M(x; y; z)$ تنتمي لـ (S) فإنها تحقق $\omega M = 3$.

$$\omega M = 3 \text{ معناه } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

ب - حساب $d(\omega; (ABC))$.

$$d(\omega; (ABC)) = \frac{|-2(1) + 1 + 2(1) - 4|}{3} = \frac{|-3|}{3} = 1 \text{ ومنه } d(\omega; (ABC)) = \frac{|-2(1) + 1 + 2(1) - 4|}{3}$$

3- تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) المار من ω والعمودي على (ABC) .

بما أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) فإن $\vec{n}(-2; 1; 2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من المستقيم (Δ) لدينا: $\overrightarrow{\omega M} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 1 = -2t \\ y - 1 = t \\ z - 1 = 2t \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x - 1 = -2t \\ y - 1 = t \\ z - 1 = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 4- إثبات أن المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) .
 لدينا نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R = 3$ و $d(\omega; (ABC)) = 1$ ومنه
 $R > d(\omega; (ABC))$ وبالتالي (ABC) و (S) متقاطعان في دائرة (C) مركزها H
 المسقط العمودي للنقطة ω على المستوي (ABC) ونصف قطرها r .
 حسب نظرية فيثاغورث $R^2 = r^2 + d^2$ ومنه $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{3}$
 H المسقط العمودي للنقطة ω على المستوي (ABC) إذن هي نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

$$\text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad -2(1 - 2t) + 1 + t + 2(1 + 2t) - 4 = 0$$

$$\text{ومنه } 9t - 3 = 0 \text{ أي } t = \frac{1}{3} \text{ وعليه } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ بالتالي } H\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

إذن (ABC) و (S) يتقاطعان وفق دائرة (C) مركزها H ونصف قطرها $2\sqrt{3}$.

تمرين 14 ⊗ بكالوريا علوم تجريبية 2011

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(0; 1; 5)$ ، $B(2; 1; 7)$ و $C(3; -3; 6)$.

1- أ) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل B و $\vec{u}(1; -4; 1)$ شعاع توجيه له.

ب) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ج) بين أن الشعاعين \vec{AB} و \vec{BC} متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

2- نعتبر النقطة $M(2+t; 1-4t; 7-t)$ حيث t عدد حقيقي.

ولتكن الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(t) = AM$.

أ) اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$.

ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

الحل ⊗

1- أ) كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل B و $\vec{u}(1; -4; -1)$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$M(x; y; z)$ تنتمي لـ (Δ) معناه $\vec{BM} = k\vec{u}$ حيث k عدد حقيقي و $\vec{BM}(x-2; y-1; z-7)$

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 4k \\ z = 7 - k \end{cases} \quad \text{أي } \begin{cases} x - 2 = k \\ y - 1 = -4k \\ z - 7 = -k \end{cases} \quad \text{و } \vec{BM} = k\vec{u} \text{ معناه } \vec{BM}(k; -4k; -k)$$

(ب) التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

$$C \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } \begin{cases} k=1 \\ k=1 \text{ وعليه} \\ k=1 \end{cases} \begin{cases} 3=2+k \\ -3=1-4k \\ 6=7-k \end{cases}$$

k وحيد إذن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

(ج) إثبات أن الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BC} متعامدان.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} (2; 0; 2) \text{ و } \overrightarrow{BC} (1; -4; -1) \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2(1) + 0(-4) + 2(-1) = 2 - 2 = 0$$

وبالتالي الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BC} متعامدان.

(د) استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

لدينا $B \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta)$ إذن (Δ) هو المستقيم (BC) .

ولدينا $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ وهذا يعني أن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

أي B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

وعليه فإن المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي AB .

$$d(A; (\Delta)) = AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2- أ) كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t .

$$AM = \sqrt{8 + 18t^2} \text{ ومنه } AM = \sqrt{(2+t)^2 + ((1-4t)-1)^2 + ((7-t)-5)^2}$$

$$\text{أي أن } h(t) = \sqrt{8 + 18t^2}$$

(ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$

$$\text{الدالة } h \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا: } h'(t) = \frac{36t}{2\sqrt{8+18t^2}} \text{ أي } h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{8+18t^2}}$$

(ج) استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

$$h'(0) = 0 \text{ ومنه الدالة } h \text{ تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة } t = 0 \text{ وهي } h(0) = 2\sqrt{2}$$

ومنه المسافة AM تكون أصغر ما يمكن من أجل $t = 0$.

المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

$$h(0) = 2\sqrt{2} \text{ و } d(A; (\Delta)) = 2\sqrt{2} \text{ وعليه } d(A; (\Delta)) = h(0)$$

تمرين 15

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(2; 1; 3), B(-3; -1; 7), C(3; 2; 4), D(0; 2; 0)$$

1- بين أن النقط A, B و C تعين مستويا.

$$2- (\Delta) \text{ مستقيم معرف بتمثيله الوسيطى } (t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

أ- بين أن (Δ) يعامد المستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

ب- تحقق أن النقطة D لا تنتمي للمستقيم (Δ) ، ثم عيّن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D



على المستقيم (Δ) .جـ - أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) .3- بين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$(x+4y+z+3)^2 - (3x+y+2z-1)^2 = 0 \text{ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي } (ABC).$$

الحل

1- إثبات أن النقط A, B, C تعين مستويا.لدينا: $\overrightarrow{AB}(-5; -2; 4)$ و $\overrightarrow{AC}(1; 1; 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} \text{ مرتبطان خطيا معناه } \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \text{ ومنه } \begin{cases} -5 = k \\ -2 = k \\ 4 = k \end{cases} \text{ لا يمكن إيجاد } k.$$

إذن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} مستقلان خطيا ومنه النقط A, B, C ليست في استقامة فهي تعين مستويا.

$$2- (\Delta) \text{ مستقيم معرف بتمثيله الوسيطى } (t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

أ - إثبات أن (Δ) يعامد المستوي (ABC) .لدينا $\vec{u}(2; -3; 1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$$\text{ولدينا } \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-5) - 3(-2) + 4 = -10 + 6 + 4 = 0$$

$$\text{و } \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(1) - 3(1) + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

ومنه الشعاع \vec{u} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وعليه \vec{u} يعامد المستوي (ABC) وبالتالي المستقيم (Δ) يعامد المستوي (ABC) .كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .لدينا $\vec{u}(2; -3; 1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) .من أجل كل $M(x; y; z)$ من المستوي (ABC) لدينا $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ و $\overrightarrow{AM}(x-2; y-1; z-3)$ ومنه $2(x-2) - 3(y-1) + (z-3) = 0$ أي $2x - 3y + z - 4 = 0$ هي معادلة للمستوي (ABC) .ب - التحقق أن النقطة D لا تنتمي للمستقيم (Δ) .

$$\text{نفرض أن } D \text{ تنتمي للمستقيم } (\Delta) \text{ إذن } \begin{cases} 0 = -7 + 2t \\ 2 = -3t \\ 0 = 4 + t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ t = -\frac{2}{3} \\ t = -4 \end{cases} \text{ تناقض.}$$

بالتالي النقطة D لا تنتمي للمستقيم (Δ) .تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (Δ) .

$$H \text{ المسقط العمودي للنقطة } D \text{ على } (\Delta) \text{ إذن } \vec{u} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$$

$$H \text{ تنتمي للمستقيم } (\Delta) \text{ ومنه } H(-7+2t; -3t; 4+t) \text{ و } \overrightarrow{DH}(-7+2t; -3t-2; 4+t)$$

ولدينا $\vec{u}(2; -3; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \text{ معناه } 2(-7+2t) - 3(-3t-2) + 4+t = 0 \text{ أي } 14t - 4 = 0 \text{ ومنه } t = \frac{2}{7}$$

$$\text{وعليه } H\left(-\frac{45}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{30}{7}\right) \text{ أي } H\left(-7+2\left(\frac{2}{7}\right); -3\left(\frac{2}{7}\right); 4+\frac{2}{7}\right)$$

3- إثبات أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$(3x + y + 2z - 1)^2 - (x + 4y + z + 3)^2 = 0 \text{ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي } (ABC).$$

$$(3x + y + 2z - 1)^2 - (x + 4y + z + 3)^2 = 0 \text{ تعني}$$

$$[(3x + y + 2z - 1) + (x + 4y + z + 3)][(3x + y + 2z - 1) - (x + 4y + z + 3)] = 0$$

$$\text{أي } (4x + 5y + 3z - 2)(2x - 3y + z - 4) = 0$$

$$\text{ومنه } 2x - 3y + z - 4 = 0 \text{ أو } 4x + 5y + 3z - 2 = 0$$

إذن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$(3x + y + 2z - 1)^2 - (x + 4y + z + 3)^2 = 0 \text{ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي } (ABC).$$

تمرين 16

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(1; 4; 3), B(0; 2; 2), C(1; -1; 1) \text{ والمستوي } (P) \text{ الذي معادلته } x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

$$\text{أ - تحقق أن } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \end{cases} \text{ هو تمثيل وسيطي للمستقيم } (AB) \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

ب - أثبت أن (AB) يقطع المستوي (P) ، ثم عيّن H إحداثيات نقطة تقاطعها.

ج - تحقق أن النقط A, B, C ليست في استقامية وأن $\vec{n}(1; 2; -5)$ ناظم للمستوي (ABC) .

د - عيّن معادلة ديكراتية للمستوي (ABC) .

- بيّن أن (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

$$(S) \text{ سطح كرة معادلته: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

أ - عيّن ω مركز (S) ونصف قطرها.

ب - أحسب المسافة بين النقطة ω والمستوي (P) ، ثم استنتج تقاطع (P) و (S) .

الحل

$$\text{أ - التحقق أن } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \end{cases} \text{ هو تمثيل وسيطي للمستقيم } (AB).$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \end{cases} \text{ وحيد ومنه النقطة } A \text{ تنتمي للمستقيم الذي تمثله الوسيطي } \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = 1+t \\ 4 = 4+2t \\ 3 = 3+t \end{cases}$$

ولدينا \overline{AB} مرتبط خطيا مع الشعاع $\vec{v}(1;2;1)$ ومنه $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) .

ب - إثبات أن (AB) يقطع المستوي (P) .

لدينا $\vec{u}(1;-3;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\overline{AB}(-1;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) .
و $\vec{u} \cdot \overline{AB} = -1 - 3(-2) - 2(-1) = 7$ وهذا يعني أن الشعاعين \vec{u} و \overline{AB} غير متعامدين
ومنه (AB) يقطع المستوي (P) .
تعيين H إحداثيات نقطة تقاطعهما.

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \\ x - 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{إحداثيات النقطة } H \text{ معرفة بالجملة}$$

وعليه $0 = 1+t - 3(4+2t) - 2(3+t) + 3 = -7t - 14 = 0$ أي $t = -2$ ومنه

$$\begin{cases} x = 1-2 \\ y = 4+2(-2) \\ z = 3-2 \end{cases} \quad \text{إذن } H(-1;0;1) \text{ أي}$$

ج - تحقق أن النقط A, B, C ليست في استقامة.

لدينا $\overline{AB}(-1;-2;-1)$ و $\overline{AC}(0;-5;-2)$ و $\frac{0}{-1} \neq \frac{-5}{-2}$ إذن الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC}

غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A, B, C ليست في استقامة.

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = -1 + 2(-2) - 5(-1) = -5 + 5 = 0 \quad \text{و} \quad \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 + 2(-5) - 5(-2) = -10 + 10 = 0$$

الشعاع \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} ومنه \vec{n} ناظمي للمستوي (ABC) .

د - تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (ABC) فإنها تحقق $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ مع $\vec{AM}(x-1;y-4;z-3)$.

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{معناه} \quad (x-1) + 2(y-4) - 5(z-3) = 0$$

ومنه $x + 2y - 5z + 6 = 0$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

- إثبات أن (P) و (ABC) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(1;2;-5)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) و $\vec{u}(1;-3;-2)$ شعاع ناظم للمستوي (P) و

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{2} \quad \text{ومنه الشعاعان } \vec{n} \text{ و } \vec{u} \text{ غير مرتبطين خطيا وبالتالي } (P) \text{ و } (ABC) \text{ متقاطعان.}$$

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 3 = 0 \dots\dots(1) \\ x + 2y - 5z + 6 = 0 \dots\dots(2) \end{cases} \quad \text{إذا كانت } M \in (\Delta) \text{ فإن إحداثياتها تحقق الجملة}$$

$$\text{ب طرح (1) من (2) نجد } 5y - 3z + 3 = 0 \text{ ومنه } y = \frac{3}{5}z - \frac{3}{5}$$

بالتعويض في (1) نجد $x - 3\left(\frac{3}{5}z - \frac{3}{5}\right) - 2z + 3 = 0$ ومنه $5x - 9z + 9 - 10z + 15 = 0$

ومنه $5x - 19z + 24 = 0$ وعليه $x = \frac{19}{5}z - \frac{24}{5}$

$$\begin{cases} x = 19t - \frac{24}{5} \\ y = 3t - \frac{3}{5} \\ z = 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نجد } z = 5t \quad \text{بوضع}$$

أ - تعيين ω مركز (S) ونصف قطرها.

$$(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 - 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 1 = 0$$

$$\text{وتكافئ} \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$

إذن مركز (S) هو النقطة $\omega(1; -1; 1)$ ونصف قطرها $R = 2$.

ب - حساب المسافة بين النقطة ω والمستوي (P) .

$$d = \frac{|1 - 3(-1) - 2(1) + 3|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

استنتاج تقاطع (P) و (S) .

$d < R$ ومنه (P) يقطع (S) في دائرة مركزها I المسقط العمودي للنقطة ω على المستوي (P) ونصف قطرها r .

$$\text{حسب نظرية فيثاغورث} \quad r^2 + d^2 = R^2 \quad \text{ومنه} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{25}{14}} = \sqrt{\frac{31}{14}}$$

تمرين 17 ⊗ بكالوريا تقني رياضي 2013

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(3; -2; -1), B(5; -3; 2), C(2; 3; 2), D(1; -5; -2)$$

(1) بين أن النقط A, B, C تعين مستويا؛ نرمز له بالرمز (P) .

(2) بين أن الشعاع $\vec{n}(2; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثم جد معادلة ديكرتية للمستوي (P) .

(3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P) .

ب) عيّن إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .

(4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ، و λ عدد حقيقي حيث: $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

$$\text{أ) بين أن: } \lambda = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$$

ب) استنتج العدد الحقيقي λ وإحداثيات النقطة H ، ثم المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

الحل ⊗

(1) إثبات أن النقط A, B, C تعين مستويا.

$$\overrightarrow{AB}(2; -1; 3) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC}(-1; 5; 3) \quad \text{ومنه} \quad \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ غير متناسبة}$$

أي الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقط A ، B و C تعيّن مستويًا.
(2) إثبات أن الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P) .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(2) + 1(-1) - 1(3) = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(-1) + 1(5) - 1(3) = 0 \end{cases} \text{ لدينا}$$

ومنه الشعاع \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وعليه فإن الشعاع \vec{n} ناظمي للمستوي (ABC) .
معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من (P) لدينا: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ مع $\overrightarrow{AM}(x-3; y+2; z+1)$.
 $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ معناه $2(x-3) + (y+2) - (z+1) = 0$ ومنه $2x + y - z - 5 = 0$ هي معادلة للمستوي (P) .

(3) أ) التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P) .
بما أن (Δ) يعامد (P) فإن \vec{n} هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ولدينا $D \in (\Delta)$.
لتكن $M(x; y; z)$ من المستقيم (Δ) فإنها تحقق: $\overrightarrow{DM} = t\vec{n} / t \in \mathbb{R}$ مع $\overrightarrow{DM} = (x-1; y+5; z+2)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \text{ أي } (\Delta): \begin{cases} x - 1 = 2t \\ y + 5 = t \\ z + 2 = -t \end{cases} \text{ ومنه}$$

ب) تعيين إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .
إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من النقطة D مع المستوي (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) .

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \dots\dots\dots(1) \\ y = -5 + t \dots\dots\dots(2) \\ z = -2 - t \dots\dots\dots(3) \\ 2x + y - z - 5 = 0 \dots\dots\dots(4) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:
 $2(1+2t) + (-5+t) - (-2-t) - 5 = 0$ ومنه $6t - 6 = 0$ أي $t = 1$.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = -3 \end{cases} \text{ ومنه } E(3; -4; -3) \text{ إذن}$$

$$(4) \text{ أ) إثبات أن: } \lambda = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$$

لدينا H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ومنه $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\text{ولدينا } \overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB} \text{ إذن } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ ومنه } \lambda = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$$

ب) استنتاج العدد الحقيقي λ .

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-2) - 1(-3) + 3(-1) = -4 \text{ ومنه } \overrightarrow{AD}(-2; -3; -1) \text{ و } \overrightarrow{AB}(2; -1; 3)$$



$$\text{و } \|\overline{AB}\| = \sqrt{14} \text{ إذن } \lambda = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

إحداثيات النقطة H .نضع $H(x'; y'; z')$.

$$\text{لدينا } \overline{AH} = \lambda \overline{AB} \text{ (2}\lambda; -\lambda; 3\lambda) \text{ و } \overline{AH}(x'-3; y'+2; z'+1) \text{ وعليه } \overline{AH} = \lambda \overline{AB} \text{ معناه}$$

$$x'-3 = 2\lambda \text{ و } y'+2 = -\lambda \text{ و } z'+1 = 3\lambda \text{ ومنه } x' = 2\lambda + 3 \text{ و } y' = -\lambda - 2 \text{ و } z' = 3\lambda - 1$$

$$\text{وبما أن } \lambda = -\frac{2}{7} \text{ فإن: } x' = \frac{17}{7} \text{ و } y' = -\frac{12}{7} \text{ و } z' = -\frac{13}{7} \text{ إذن } H\left(\frac{17}{7}; -\frac{12}{7}; -\frac{13}{7}\right)$$

المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

$$d(D; (AB)) = DH = \frac{3\sqrt{70}}{7}$$

تمرين 18 بكالوريا علوم تجريبية 2014الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1; -1; -2)$ ، $B(1; -2; -3)$ و $C(2; 0; 0)$.(1) أ) برهن أن A ، B و C ليست في استقامية.ب) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (ABC) .ج) تحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .(2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

$$(P): x - y - 2z + 5 = 0 \text{ و } (Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$$

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

برهن أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيط

(3) عيّن تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .(4) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.نسمي $d(M, (P))$ المسافة بين M والمستوي (P) و $d(M, (Q))$ المسافة بين M والمستوي (Q) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M حيث: $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$.**الحل**(1) أ) إثبات أن A ، B و C ليست في استقامية.

$$\text{لدينا } \overline{AB}(0; -1; -1) \text{، } \overline{AC}(1; 1; 2) \text{ و } \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{-1} \text{ إذن } \overline{AB} \text{ و } \overline{AC} \text{ الشعاعان غير مرتبطين خطياً ومنه}$$

 A ، B و C ليست في استقامية.ب) كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستوي (ABC) .لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (ABC) \text{ معناه } \overline{AM} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AC} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

$$\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\alpha + \beta - 1 \\ z = -\alpha + 2\beta - 2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 1 = \beta \\ y + 1 = -\alpha + \beta \\ z + 2 = -\alpha + 2\beta \end{cases} \text{ ومنه } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

ج) التحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

$$x_B + y_B - z_B - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0 \text{، } x_A + y_A - z_A - 2 = 1 - 1 + 2 - 2 = 0$$

$$x + y - z - 2 = 0 \text{ ومنه إحداثيات النقط } A, B, C \text{ تحقق المعادلة } x_c + y_c - z_c - 2 = 2 + 0 - 0 - 2 = 0$$

وعليه $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

طريقة 2: بما أن $(\beta + 1) + (-\alpha + \beta - 1) - (-\alpha + 2\beta - 2) - 2 = 0$ فإن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ ذي التمثيل الوسيطى}$$

$$(P) \text{ و } (Q) \text{ يتقاطعان وفق المستقيم } (\Delta) \text{ محتوى في المستوي } (P) \text{ ومنه } (t - 3) - (-t) - 2(t + 1) + 5 = 0$$

$$(Q) \text{ محتوى في المستوي } (P) \text{ ومنه } 3(t - 3) + 2(-t) - (t + 1) + 10 = 0$$

إذن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ)

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

$$\text{بما أن } (P) \cap (Q) = (\Delta) \text{ فإن } (ABC) \cap (P) \cap (Q) = (ABC) \cap (\Delta)$$

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 6 \\ z = -5 \end{cases} \text{ ونحل الجملة } \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{وعليه } (ABC) \cap (P) \cap (Q) = \{I(-9; 6; -5)\}$$

تعيين المجموعة (Γ) للنقط M حيث: $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$

$$\sqrt{6} \times \frac{|x - y - 2z + 5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{14} \times \frac{|3x + 2y - z + 10|}{\sqrt{14}} \text{ معناه } \sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$$

$$\text{وتكافئ } |x - y - 2z + 5| = |3x + 2y - z + 10| \text{ وتكافئ } x - y - 2z + 5 = 3x + 2y - z + 10 \text{ أو } x - y - 2z + 5 = -3x - 2y + z - 10$$

$$4x + y - 3z + 15 = 0 \text{ أو } 2x + 3y + z + 5 = 0 \text{ أي } (P_1): 2x + 3y + z + 5 = 0 \text{ و } (P_2): 4x + y - 3z + 15 = 0$$

إذن (Γ) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) حيث $(P_1): 2x + 3y + z + 5 = 0$ و $(P_2): 4x + y - 3z + 15 = 0$.

تمرين 19 بكالوريا تقنى رياضى 2011

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A, B, C, D حيث:

$$A(2; 0; 1), B(3; -2; 0), C(2; 8; -4), D(3; 5; 3)$$

1. بيّن أن النقط A, B, D تعين مستويا.

2. بيّن أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) .

3. H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

أ - بيّن أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH) .

ب - عيّن معادلة للمستوي (CDH) واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

ج - استنتج إحداثيات النقطة H .

4. أحسب الأطوال AB, CD, DH ، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل

1. إثبات أن النقط A, B, D تعين مستويا.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB}(1; -2; -1) \text{ و } \overrightarrow{AD}(1; 5; 2) \text{ و } \frac{1}{1} \neq \frac{5}{-2} \text{ وبالتالي } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AD} \text{ غير مرتبطين خطيا}$$



فإنَّ النقط D, B, A ليست على استقامة واحدة فهي تعيّن مستويا.

2. إثبات أنَّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) .

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1(1) - 3(-2) + 7(-1) = 0 \text{ ومنه } \overrightarrow{CD} (1; -3; 7)$$

$$\text{و } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 1(1) - 3(5) + 7(2) = 0$$

ومنهُ الشعاع \overrightarrow{CD} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AD} وعليه \overrightarrow{CD} يعامد المستوي (ABD) وبالتالي المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) .

3. أ - إثبات أنَّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH) .

لدينا H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) ومنهُ \overrightarrow{AB} يعامد \overrightarrow{CH} .

$$\text{ولدينا } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1(1) - 3(-2) + 7(-1) = 0 \text{ ومنهُ } \overrightarrow{AB} \text{ يعامد } \overrightarrow{CD}$$

وبالتالي فإنَّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH) .

ب - تعيين معادلة للمستوي (CDH) .

لدينا \overrightarrow{AB} شعاعا ناظميا للمستوي (CDH) ومنهُ فإنَّ المستوي (CDH) له معادلة من الشكل

$$x - 2y - z + d = 0 \text{ وبما أنَّ } D \text{ مثلا تنتمي للمستوي } (CDH) \text{ فإنَّ } 3 - 2(5) - 3 + d = 0$$

$$\text{ومنهُ } d = 10 \text{ وعليه معادلة المستوي } (CDH) \text{ هي: } x - 2y - z + 10 = 0$$

التمثيل الوسيطى للمستقيم (AB) .

من أجل كل $M(x; y; z)$ من (AB) لدينا: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ حيث t عدد حقيقي .

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 2 = t \\ y = -2t \\ z - 1 = -t \end{cases} \text{ ومنهُ } \overrightarrow{AM} (x - 2; y; z - 1)$$

ج - استنتاج إحداثيات النقطة H .

بما أنَّ H تنتمي للمستقيم (AB) وتنتمي للمستوي (CDH) فإنَّها تمثل نقطة تقاطع (AB) و (CDH) .

H تنتمي لـ (AB) معناه $H(2+t; -2t; 1-t)$ ولدينا H تنتمي للمستوي (CDH)

$$\text{إذن } x_H - 2y_H - z_H + 10 = 0 \text{ ومنهُ } 2 + t - 2(-2t) - (1 - t) + 10 = 0 \text{ ومنهُ } t = -\frac{11}{6}$$

$$\text{وعليه } H\left(2 - \frac{11}{6}; -2\left(-\frac{11}{6}\right); \frac{11}{6} + 1\right) \text{ أي } H\left(\frac{1}{6}; \frac{11}{3}; \frac{17}{6}\right)$$

4. حساب الأطوال AB, CD, DH .

$$CD = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{59}, \quad AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$DH = \sqrt{\left(\frac{1}{6} - 3\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{17}{6} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{354}}{6}$$

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه يعطى $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$.

$$\text{فإنَّ } V = \frac{1}{3} S_{ABD} \times d, \text{ حيث } S_{ABD} \text{ مساحة المثلث } ABD \text{ و } d \text{ هو بُعد النقطة } C \text{ على المستوي } (ABD)$$

بما أنَّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH) فإنَّ المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB)

هي النقطة H نقطة تقاطع (AB) والمستوي (CDH) وعليه $S_{ABD} = \frac{AB \cdot DH}{2}$.

وبما أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) فإن النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (ABD) أي $d = CD$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{AB \cdot DH}{2} \times CD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{59}}{2} \times \sqrt{59} = \frac{59}{6} uv$$

تمرين 20

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(3; -2; 2)$ ، $B(6; 1; 5)$ و $C(6; -2; -1)$.

الجزء الأول:

1. بين أن المثلث ABC قائم.
2. ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x + y + z - 3 = 0$.
- بين أن (P) عمودي على (AB) ويمر من النقطة A .
3. ليكن (P') المستوي العمودي على (AC) والذي يمر من A .
- عين معادلة ديكرتية لـ (P') .
4. عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

الجزء الثاني:

1. لتكن النقطة $D(0; 4; -1)$ ، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .
2. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
3. بين أن قياس الزاوية BDC هي $\frac{\pi}{4} \text{ Rad}$.
4. أ - احسب مساحة المثلث BDC .
- ب - استنتج المسافة بين A والمستوي (BDC) .

الحل

الجزء الأول:

1. إثبات أن المثلث ABC قائم.
- لدينا $\overline{AB}(3; 3; 3)$ و $\overline{AC}(3; 0; -3)$.
- $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3(3) + 3(0) + 3(-3) = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في A .
2. ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x + y + z - 3 = 0$.
- إثبات أن (P) عمودي على (AB) ويمر من النقطة A .
- لدينا $\vec{n}(1; 1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overline{AB} = 3\vec{n}$ ومنه الشعاعان \overline{AB} و \vec{n} مرتبطان خطياً إذن \overline{AB} هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي (P) عمودي على (AB) .
- ولدينا $x_A + y_A + z_A - 3 = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$ إذن المستوي (P) يمر من النقطة A .
3. ليكن (P') المستوي العمودي على (AC) والذي يمر من A .
- تعيين معادلة ديكرتية لـ (P') .

بما أن (P') عمودي على (AC) فإن $\overline{AC}(3; 0; -3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P') إذن المستوي (P') معادلته من الشكل $3x - 3z + d = 0$ ولدينا A نقطة من (P') يعني $3x_A - 3z_A + d = 0$ أي $3(3) - 3(2) + d = 0$ ومنه $d = -3$ وبالتالي $(P') : 3x - 3z - 3 = 0$.

4. تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \dots (1) \\ 3x - 3z - 3 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

المستقيم (Δ) معرف بالجملة التالية:

بضرب المعادلة (1) بالعدد 3 وبجمع المعادلتين نجد $6x + 3y - 12 = 0$ ومنه $y = 4 - 2x$.

وبتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد $x + (4 - 2x) + z - 3 = 0$ ومنه $z = x - 1$.

$$\text{وبوضع } x = t \text{ نجد } (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

الجزء الثاني:

1. إثبات أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

$$\begin{cases} \overline{AD} \cdot \overline{AB} = -3(3) + 6(3) - 3(3) = 0 \\ \overline{AD} \cdot \overline{AC} = -3(3) + 6(0) - 3(-3) = 0 \end{cases}$$

لدينا $\overline{AD}(-3; 6; -3)$ و

ومنه الشعاع \overline{AD} عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} وعليه \overline{AD} يعامد المستوي (ABC) وبالتالي المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) .

2. حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

بما أن المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) فإن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) أي $d(D; (ABC)) = AD$.

وعليه $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AD$ حيث S_{ABC} هي مساحة المثلث القائم ABC .

$$AC = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \quad AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{6} \quad \text{و} \quad S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv \quad \text{وبالتالي}$$

3. تبين أن قيس الزاوية BDC هي $\frac{\pi}{4} \text{ Rad}$.

$$\cos(\overline{DC}; \overline{DB}) = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{DB}}{DC \cdot DB} \quad \text{ومنه} \quad \overline{DC} \cdot \overline{DB} = DC \times DB \times \cos(\overline{DC}; \overline{DB})$$

$$\overline{DC} \cdot \overline{DB} = 6(6) - 3(-6) + 6(0) = 54 \quad \text{ومنه} \quad \overline{DB}(6; -3; 6) \quad \text{و} \quad \overline{DC}(6; -6; 0)$$

$$\cos(\overline{DC}; \overline{DB}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{أي} \quad \cos(\overline{DC}; \overline{DB}) = \frac{54}{54\sqrt{2}} \quad \text{ومنه} \quad DC \times DB = 54\sqrt{2}$$

وهذا يعني أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} \text{ Rad}$.

4. أ - حساب مساحة المثلث BDC .

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} DC \times DB \times \sin BDC = \frac{1}{2} 54\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27ua$$

ب - استنتاج المسافة بين A والمستوي (BDC) .

لدينا $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times d$ حيث d هي المسافة بين A والمستوي (BDC) .

ومنه $27 = \frac{1}{3} (27) \times d$ وعليه $d = 3$ إذن المسافة بين A والمستوي (BDC) هي 3.

تمرين 21

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(2; 0; 2)$ والمستوي (P) ذو المعادلة: $x + y - z - 3 = 0$.

1- حدّد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على المستوي (P) .

2- حدّد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (P) .

3- نعتبر السطح (S) الذي مركزه النقطة A والذي يتقاطع مع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2.
أ - حدّد نصف قطر سطح الكرة (S) .

ب - أكتب معادلة ديكارتية للسطح (S) .

الحل

1- تحديد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على المستوي (P) .

لدينا $\vec{n}(1; 1; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أن (Δ) عمودي على (P) فإن \vec{n} هو شعاع توجيهي للمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x; y; z)$ من (Δ) ومنه $\overrightarrow{AM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases} \text{ أي } (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x - 2 = t \\ y = t \\ z - 2 = -t \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

2- تحديد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (P) .

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases} \text{ نحل الجملة } \begin{cases} x - 2 = t \\ y = t \\ z - 2 = -t \end{cases} \text{ وعليه } (2+t) + t - (2-t) - 3 = 0 \text{ ومنه } t = 1.$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ إذن } B(3; 1; 1) \text{ وعليه}$$

أ - تحديد نصف قطر سطح الكرة (S) .

ليكن R نصف قطر سطح الكرة (S) ، حسب نظرية فيثاغورث

$$R^2 = AB^2 + 2^2 = 3 + 4 = 7 \text{ ومنه } R = \sqrt{7}$$

ب - معادلة ديكارتية للسطح (S) .

$$\text{معادلة السطح } (S) \text{ هي: } (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 7$$

تمرين 22 ⊗ بكالوريا علوم تجريبية 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(2; -1; 1) , B(-1; 2; 1) , C(1; -1; 2) \text{ و } D(1; 1; 1).$$

(1) أ) تحقق أن النقط A, B, C تعين مستويا.

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

أ) احسب احداثيات النقطة G .

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$.

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

(3) بين أن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

الحل ⊗

(1) أ) التحقق أن النقط A, B, C تعين مستويا.

لدينا $\vec{AB}(-3; 3; 0)$ ، $\vec{AC}(-1; 0; 1)$ و $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$ إذن الشعاعان \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A, B, C تعين مستويا.

ب) تبين أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لدينا $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1(-3) + 1(3) + 1(0) = -3 + 3 = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1(-1) + 1(0) + 1(1) = -1 + 1 = 0$

ومنه \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} وبالتالي \vec{n} ناظم للمستوي (ABC) .

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $x + y + z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (ABC) فإن $2 - 1 + 1 + d = 0$

ومنه $d = -2$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $x + y + z - 2 = 0$.

(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

أ) حساب احداثيات النقطة G .

$$x_G = \frac{x_A + 2x_B - x_C}{2} = \frac{2 - 2 - 1}{2} = \frac{-1}{2} , y_G = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{2} = \frac{-1 + 4 - 1}{2} = 2$$

$$z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{2} = \frac{1 + 2 - 2}{2} = \frac{1}{2} \text{ وعليه } G\left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right).$$

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$.

تبين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$ ومنه $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = (1 + 2 - 1)\vec{MG}$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MG}$$

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MG}\| \text{ معناه } \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\| \text{ وتكافئ } 2\vec{MG} = 2\vec{MD} \text{ أي } \vec{MG} = \vec{MD}$$

إذن (Γ) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

ج) كتابة معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

لتكن I منتصف القطعة $[GD]$ إذن $I\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

المستوي (Γ) شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ ويشمل النقطة I .

معادلة المستوي (Γ) من الشكل $\frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z + d = 0$ وبما أن I تنتمي للمستوي (Γ) فإن $\frac{3}{8} - \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + d = 0$

ومنه $d = \frac{3}{4}$ وعليه معادلة (Γ) هي $\frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z + \frac{3}{4} = 0$ أي $6x - 4y + 2z + 3 = 0$.

(3) تبين أن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}'(6; -4; 2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) و $\vec{n}(1; 1; 1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

واضح أن \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطياً إذن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ) .

نحل الجملة
$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \dots\dots(2) \end{cases}$$
 بضرب المعادلة (1) بالعدد 4 وبجمع المعادلتين نجد

$10x + 6z - 5 = 0$ ومنه $x = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}z$ وبتعويض x في (1) نجد $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}z + y + z - 2 = 0$ ومنه $y + \frac{2}{5}z - \frac{3}{2} = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 3t \\ y = \frac{3}{2} - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5t \end{cases}$$

أي $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{5}z$ وبوضع $z = 5t$ نجد $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 3t \\ y = \frac{3}{2} - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5t \end{cases}$

تمرين 23 ⊗ بكالوريا رياضيات 2012

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط: $A(1; 1; 1)$ ، $B(1; -1; 0)$ ، $C(2; 0; 1)$.

1- بَيِّنْ أَنَّ النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2- (P_2) المستوي الذي $x - 2y - 2z + 6 = 0$ معادلة ديكارتية له.

- بَيِّنْ أَنَّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3- بَيِّنْ أَنَّ النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$.

4- أ) عَيِّنْ (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{3}$.

ب) احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .

ج) ماهي طبيعة المثلث ODE ؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ) .

الحل ⊗

1- إثبات أن النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) .

لدينا $\overrightarrow{AB}(0; -2; -1)$ و $\overrightarrow{AC}(1; -1; 0)$ و $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{-2}$ إذن الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين

خطياً ومنه فإن النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعين مستويا (P_1) .

تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P_1) .

الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} ليس لهما نفس الحامل وعليه $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ معلماً للمستوي (P_1) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت M تنتمي لـ (P_1) فإنها تحقق: $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

حيث α و β عدنان حقيقيان و $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-1; z-1)$.

$$\text{ومنه } \begin{cases} x-1 = \beta \\ y-1 = -2\alpha - \beta \\ z-1 = -\alpha \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

وهو تمثيل وسيطي للمستوي (P_1) .

2- (P_2) المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

- إثبات أن (P_1) و (P_2) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(1; -2; -2)$ شعاعاً ناظماً للمستوي (P_2) .

$$\text{نفرض أن } \vec{n} \text{ ناظمي للمستوي } (P_1) \text{ إذن } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ ولدينا } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1(0) - 2(-2) - 2(-1) = 6 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1(1) - 2(-1) - 2(0) = 3 \end{cases} \text{ تناقض.}$$

إذن الشعاع \vec{n} ليس ناظمي للمستوي (P_1) وبالتالي المستويان (P_1) و (P_2) غير متوازيين فهما متقاطعان.

كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$\begin{cases} x = 1 + \beta \dots\dots\dots(1) \\ y = 1 - 2\alpha - \beta \dots\dots\dots(2) \\ z = 1 - \alpha \dots\dots\dots(3) \\ x - 2y - 2z + 6 = 0 \dots\dots(4) \end{cases} \text{ إذا كانت } M \in (\Delta) \text{ فإن إحداثياتها تحقق الجملة:}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$$1 + \beta - 2(1 - 2\alpha - \beta) - 2(1 - \alpha) + 6 = 0 \text{ ومنه } 3\beta + 6\alpha + 3 = 0 \text{ وعليه } \beta = -2\alpha - 1$$

$$\text{وهو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta). \text{ أي } \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x = 1 + (-2\alpha - 1) \\ y = 1 - 2\alpha - (-2\alpha - 1) \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

3- إثبات أن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$.

نسمي G هي مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$ وعليه

$$x_G = \frac{1+0-1}{1+1-1} = 0, \quad y_G = \frac{1-1-0}{1+1-1} = 0, \quad z_G = \frac{1+1-2}{1+1-1} = 0 \text{ ومنه النقطة } G \text{ منطقة على } O.$$

إذن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$.

4- أ) تعيين (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{3}$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (1+1-1)\overrightarrow{MO} \text{ أي } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO}$$

ومنه $MO = 2\sqrt{3}$ أي $\|\overrightarrow{MO}\| = 2\sqrt{3}$ تعني $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{3}$

إذن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزه O ونصف قطره $2\sqrt{3}$.

(ب) حساب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

$x^2 + y^2 + z^2 = 12$ هي معادلة ديكارتية لـ (S).

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases} \text{ وعليه } (-2\alpha)^2 + 2^2 + (1 - \alpha)^2 = 12 \text{ أي } 5\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0$$

بعد حل المعادلة نجد: $\alpha = \frac{7}{5}$ أو $\alpha = -1$.

$$\text{ومنه} \begin{cases} x = -2\left(\frac{7}{5}\right) \\ y = 2 \\ z = 1 - \frac{7}{5} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2(-1) \\ y = 2 \\ z = 1 + 1 \end{cases}$$

إذن يتقاطع (S) و (Δ) في النقطتين $D\left(-\frac{14}{5}; 2; -\frac{2}{5}\right)$ و $E(2; 2; 2)$.

(ج) طبيعة المثلث ODE.

بما أن النقطتين D و E تنتميان لسطح الكرة (S) التي مركزها O فإن $OE = OD$ ومنه

فإن المثلث ODE متساوي الساقين.

استنتاج المسافة بين O و (Δ).

بما أن النقطتين D و E تنتميان للمستقيم (Δ) فإن (Δ) هو المستقيم (DE).

المثلث ODE متساوي الساقين بالتالي المسقط العمودي للنقطة O على (DE) هي النقطة H

منتصف القطعة [DE] ومنه $d(O; (DE)) = OH$.

$$\text{ولدينا } H\left(-\frac{2}{5}; 2; \frac{4}{5}\right) \text{ وعليه } OH = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

$$\text{إذن } d(O; (\Delta)) = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

تمرين 24

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(1; 2; 3)$ ، $B(0; 1; 4)$ و $C(-1; -3; 2)$ ، $D(4; -2; 5)$ والشعاع $\vec{n}(2; -1; 1)$.

1- أ- بين أن النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة.

ب- بين أن الشعاع $\vec{n}(2; -1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

$$2- \text{ ليكن المستقيم } (\Delta) \text{ الذي تمثيله الوسيطى: } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

- بين أن النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوى (ABC) .
- 3- لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC) .
- بين أن H هي مركز ثقل المثلث ABC .

الحل

- 1- أ - إثبات أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة.
- لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ و $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1}$ إذن الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطياً ومنه النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة.
- ب - إثبات أن الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .
- لدينا $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-1) - 1(-1) + 1(1) = -2 + 2 = 0$
- و $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(-2) - 1(-5) + 1(-1) = -4 + 5 - 1 = 0$
- بما أن $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ والشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطياً فإن $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

- ج - تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (ABC) لدينا: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$
- $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ معناه $2(x-1) - 1(y-2) + (z-3) = 0$ ومنه $2x - y + z - 3 = 0$ (ABC).

2- ليكن المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطى: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

- إثبات أن النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوى (ABC) .

$D \in (\Delta)$ معناه $\begin{cases} 4 = 2 - 2t \\ -2 = -1 + t \\ 5 = 4 - t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ إذن من أجل $t = -1$ نجد النقطة $D(4;-2;5)$ من المستقيم (Δ) .

- من التمثيل الوسيطى نجد $\vec{u}(-2;1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .
- و $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه $\vec{u} = -\vec{n}$ وعليه الشعاعان \vec{u} و \vec{n} مرتبطان خطياً وبالتالي فإن (Δ) عمودي على المستوى (ABC) .

- 3- لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC) .

- بين أن H هي مركز ثقل المثلث ABC .

- نجد أولاً إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC) .

نحل الجملة $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ ومنه $2(2-2t) - (-1+t) + (4-t) - 3 = 0$

ومنه $-6t + 6 = 0$ وعليه $t = 1$ إذن $H(0;0;3)$.

لدينا $\overrightarrow{HA}(1;2;0)$ ، $\overrightarrow{HB}(0;1;1)$ و $\overrightarrow{HC}(-1;-3;-1)$

ومنه $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}(-1+0+1;-3+1+2;-1+1+0) = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}(0;0;0)$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ وبما أن النقط A, B, C ليست في استقامة فإن H هي مركز ثقل

المثلث ABC .**تمرين 25**الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(1; 4; -5), B(3; 2; -4), C(5; 4; -3), D(-2; 8; 4) \text{ والشعاع } \vec{u}(1; 5; -1).$$

1. بَيِّنْ أَنَّ $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .2. حدِّد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي \vec{u} .3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x - y - z - 7 = 0$.

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ تمثيله الوسيطي } (\Delta) \text{ يتقاطعان وفق مستقيم } (P) \text{ و } (ABC) \text{ أ - بَيِّنْ أَنَّ المستويين } (ABC) \text{ و } (P)$$

ب - بَيِّنْ أَنَّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.4. تعطى النقطتان $E(3; 0; -4)$ و $F(-3; 3; 5)$ ، تحقق أنَّ: $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي.أ - جد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ (Γ) واستنتج أنَّ (Γ) مستو، شعاع ناظمي له.ب - عَيِّنْ قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.**الحل**1. إثبات أنَّ $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

$$\text{لدينا } x_A - 2z_A - 11 = 1 - 2(-5) - 11 = 0 \text{ و } x_B - 2z_B - 11 = 3 - 2(-4) - 11 = 0$$

$$\text{و } x_C - 2z_C - 11 = 5 - 2(-3) - 11 = 0 \text{ ومنه إحداثيات النقط } A, B, C \text{ تحقق المعادلة } x - 2z - 11 = 0$$

وبالتالي $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة للمستوي (ABC) .2. تحديد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي \vec{u} .لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء. M تنتمي لـ (T) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\overline{DM} = k\vec{u}$.

$$\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 8 + 5k \\ z = 4 - k \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x + 2 = k \\ y - 8 = 5k \\ z - 4 = -k \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x + 2 = k \\ y - 8 = 5k \\ z - 4 = -k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x - y - z - 7 = 0$.

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ تمثيله الوسيطي } (\Delta) \text{ يتقاطعان وفق مستقيم } (P) \text{ و } (ABC) \text{ أ - إثبات أَنَّ المستويين } (ABC) \text{ و } (P)$$

بالتعويض في معادلة كل من (ABC) و (P) نجد:

$$(11 + 2t) - 2t - 11 = 0 \text{ و } (11 + 2t) - (4 + t) - t - 7 = 11 - 11 + 2t - 2t = 0$$

ومنه (Δ) محتو في (ABC) ومحتو في (P) وعليه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) .ب - إثبات أَنَّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

$$\text{لدينا } \vec{u}(1; 5; -1) \text{ هو شعاع توجيه لـ } (T) \text{ و } \vec{v}(2; 1; 1) \text{ هو شعاع توجيه لـ } (\Delta).$$

و $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{5}$ إذن (T) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (T) و (Δ) .

$$\begin{cases} 11+2t = -2+k \dots\dots(1) \\ 4+t = 8+5k \dots\dots\dots(2) \\ t = 4-k \dots\dots\dots(3) \end{cases} \quad (*) \quad \text{نحل الجملة}$$

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة (*).

بتعويض t بقيمتها من (3) في (2) نجد $4+(4-k)=8+5k$ ومنه $k=0$ بالتعويض في (3) نجد $t=4$ وبتعويض t و k بقيمتهما في (1) نجد $19=-2$ تناقض.

إذن (T) و (Δ) غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوى.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ ، تحقق أن: $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

$$E \in (\Delta) \text{ معناه } \begin{cases} 3 = 11 + 2t \\ 0 = 4 + t \\ -4 = t \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases} \text{ بما أن } t \text{ وحيد فإن } E \in (\Delta).$$

$$F \in (T) \text{ معناه } \begin{cases} -3 = -2 + k \\ 3 = 8 + 5k \\ 5 = 4 - k \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \text{ بما أن } k \text{ وحيد فإن } F \in (T).$$

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - إيجاد بدالة α معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

$$\overline{ME}(3-x;-y;-4-z) \text{ و } \overline{FE}(6;-3;-9)$$

$$\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha \text{ معناه } 6(3-x) + 3y - 9(-4-z) = \alpha \text{ ومنه } -6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0$$

هي معادلة ديكارتية لـ (Γ) وهي معادلة مستوي شعاعه الناظمي \overline{EF} .

ب - تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

$$\text{لتكن } I \text{ منتصف } [EF] \text{ ومنه } I\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي \overline{EF} ويشمل النقطة I .

$$\text{ومنه } -6(0) + 3\left(\frac{3}{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\right) + 54 - \alpha = 0 \text{ أي } \alpha = 63.$$

طريقة ثانية:

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overline{MI} \cdot \overline{FE} = 0$.

$$\overline{MI} \cdot \overline{FE} = 0 \text{ معناه } (\overline{ME} + \overline{EI}) \cdot \overline{FE} = 0 \text{ ومعناه } \overline{ME} \cdot \overline{FE} + \overline{EI} \cdot \overline{FE} = 0$$

$$\text{أي } \overline{ME} \cdot \overline{FE} = -\overline{EI} \cdot \overline{FE} \text{ ومنه } \overline{ME} \cdot \overline{FE} = \overline{IE} \cdot \overline{FE}$$

$$\overline{IE} \cdot \overline{FE} = 3(6) - \frac{3}{2}(-3) - \frac{9}{2}(-9) = 18 + 45 = 63 \text{ ومنه } \overline{IE} \cdot \overline{FE} = 63$$

$$\text{ومنه } \overline{MI} \cdot \overline{FE} = 0 \text{ تعني } \overline{ME} \cdot \overline{FE} = 63$$

إذن المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = 63$

وعليه $\alpha = 63$.**تمرين 26** بكالوريا تقني رياضي 2014الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.A ، B و C ثلاث نقاط من الفضاء حيث $A(0; -1; 1)$ ، $B(1; 3; 2)$ و $C(-1; 3; 4)$.(1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية \widehat{BAC} (ب) بين أن النقط $A \odot B$ و C تبين مستويا.(2) أ) بين أن الشعاع $\vec{n}(2; -1; 2)$ ناظمي للمستوي (ABC) .(ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .(3) ليكن (S) سطح الكرة الذي معادلته: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$ نسمي Ω و R مركز ونصف قطر (S) احسب R وعين إحداثيات Ω (4) اكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1) و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC) .**الحل**(1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.لدينا $\overrightarrow{AB}(1; 4; 1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1; 4; 3)$ ومنه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (4) + 1 \cdot (3) = 18$.استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية \widehat{BAC} لدينا $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ ومن جهة أخرى $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$ ومنه $AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 18$ ومنه $\cos \widehat{BAC} = \frac{18}{AB \times AC}$ ولدينا $AC = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}$ ، $\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}$ ومنه $\cos \widehat{BAC} = \frac{18}{\sqrt{18} \times \sqrt{26}} = \sqrt{\frac{9}{13}}$ وهذا يعني أن $\widehat{BAC} = 34^\circ$ (ب) تبين أن النقط A ، B و C تبين مستويا.بما أن $\widehat{BAC} \neq 0$ و $\widehat{BAC} \neq \pi$ فإن النقط A ، B و C تبين مستويا.(2) أ) تبين أن الشعاع $\vec{n}(2; -1; 2)$ ناظمي للمستوي (ABC) .لدينا $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot (1) - 1 \cdot (4) + 2 \cdot (1) = 0$ و $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (4) + 2 \cdot (3) = 0$ ومنه \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وبالتالي \vec{n} ناظمي للمستوي (ABC) .(ب) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $2x - y + 2z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (ABC) فإن $2x - y + 2z - 3 = 0$ هي (ABC) وعليه معادلة المستوي $d = -3$ ومنه $1 + 2 + d = 0$ (3) ليكن (S) سطح الكرة الذي معادلته: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$ حساب R وتعيين إحداثيات Ω $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$ معناه $(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + (z-1)^2 - 1 + 5 = 0$ ومنه $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$ إذن $\Omega(2; -3; 1)$ و $R = 3$.(4) كتابة معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1) و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC) .المستوي (P) الموازي لـ (ABC) معادلته من الشكل $2x - y + 2z + d = 0$ وبما أن (P) مماس لـ (S) فإن

$$d(\Omega; (P)) = 3 \text{ ومنه } \frac{|4+3+2+d|}{3} = 3 \text{ ومنه } |9+d| = 9 \text{ وعليه } 9+d=9 \text{ أو } 9+d=-9$$

أي $d=0$ أو $d=-18$. إذن يوجد مستويان موازيان للمستوي (ABC) مماسين لسطح الكرة (S) معادلتهما

$$(P_1): 2x - y + 2z = 0 \text{ و } (P_2): 2x - y + 2z - 18 = 0.$$

تمرين 27

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(7; 1; 1), B(1; 7; 1), C(1; 1; 7) \text{ و } D(-1; -1; -1).$$

1. أ- بين أن النقط A, B, C تعين مستوي (P) ؛ ثم تحقق أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي

$$x + y + z - 9 = 0$$

ب- تحقق أن المستقيم (OD) عمودي على (P) .

ج- عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (OD) .

د- بين أن النقطة $H(3; 3; 3)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) ؛ وأنها مركز الدائرة (C)

المحيطة بالمثلث ABC .

2. ليكن (Q) المستوي المحوري للقطعة $[CD]$.

أ- تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $x + y + 4z - 12 = 0$.

ب- عين إحداثيات Ω نقطة تقاطع (OD) و (Q) .

ج- بين أن Ω هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

د- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع؛ ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$3. (S) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من الفضاء التي تحقق: } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 12\sqrt{3}.$

أ- بين أن (S) هي سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.

ب- اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) ؛ ثم تحقق أن (S) تشمل النقط A, B, C و D .

ج- استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها.

الحل

1. أ- تبين أن النقط A, B, C تعين مستوي (P)

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB}(-6; 6; 0), \overrightarrow{AC}(-6; 0; 6) \text{ و } \frac{-6}{-6} \neq \frac{0}{6} \text{ إذن الشعاعان } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} \text{ غير مرتبطين خطياً}$$

ومنه النقط A, B, C تعين مستوي (P) .

التحقق أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي $x + y + z - 9 = 0$

$$x_A + y_A + z_A - 9 = 7 + 1 + 1 - 9 = 0, x_B + y_B + z_B - 9 = 1 + 7 + 1 - 9 = 0,$$

$$x_C + y_C + z_C - 9 = 1 + 1 + 7 - 9 = 0 \text{ ومنه إحداثيات النقط } A, B, C \text{ تحقق المعادلة } x + y + z - 9 = 0$$

وعليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي $x + y + z - 9 = 0$

ب- التحقق أن المستقيم (OD) عمودي على (P) .

$$\text{لدينا } \overrightarrow{OD}(-1; -1; -1) \text{ شعاع توجيه للمستقيم } (OD) \text{ و } \vec{n}(1; 1; 1) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \text{ و } \overrightarrow{OD} = -\vec{n}$$

إذن الشعاعان \overrightarrow{OD} و \vec{n} مرتبطان خطيا بالتالي المستقيم (OD) عمودي على (P) .
ج - تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OD) .

من أجل كل $M(x; y; z)$ من المستقيم (OD) لدينا: $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OD}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

د - تبين أن النقطة $H(3; 3; 3)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (P) .

يمكن استعمال طريقتين

طريقة 1: نثبت أن H تنتمي للمستوي (P) و أن \overrightarrow{DH} و \vec{n} مرتبطان خطيا.

طريقة 2: نثبت أن H تنتمي للمستوي (P) و $d(D; (P)) = DH$.

نستعمل طريقة 1

$$H \in (P) \text{ ومنه } x_H + y_H + z_H - 9 = 3 + 3 + 3 - 9 = 0$$

ولدينا $\overrightarrow{DH}(4; 4; 4)$ ومنه $\overrightarrow{DH} = 4\vec{n}$ إذن الشعاعان \overrightarrow{DH} و \vec{n} مرتبطان خطيا بالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (P) .

إثبات أن H هي مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

$$HA = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \text{ ومنه } \overrightarrow{HA}(4; -2; -2)$$

$$HB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \text{ ومنه } \overrightarrow{HB}(-2; 4; -2)$$

$$HC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} \text{ ومنه } \overrightarrow{HC}(-2; -2; 4)$$

بما أن $HA = HB = HC$ فإن H هي مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

ب - تعيين إحداثيات Ω نقطة تقاطع (OD) و (Q) .

$$\begin{cases} x = -t \dots \dots \dots (1) \\ y = -t \dots \dots \dots (2) \\ z = -t \dots \dots \dots (3) \\ x + y + 4z - 12 = 0 \dots \dots (4) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

$$\text{ومنه } -t - t - 4t - 12 = 0 \text{ وعليه } t = -2 \text{ إذن } \Omega(2; 2; 2).$$

ج - إثبات أن Ω هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{\Omega A}(5; -1; -1), \overrightarrow{\Omega B}(-1; 5; -1), \overrightarrow{\Omega C}(-1; -1; 5), \overrightarrow{\Omega D}(-3; -3; -3)$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D}(5-1-1-3; -1+5-1-3; -1-1+5-3) = \overrightarrow{0}(0; 0; 0) \text{ أي } \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{0}$$

وهذا يعني أن Ω هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

د - إثبات أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ ومنه } \overrightarrow{AB}(-6; 6; 0)$$

$$AC = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ ومنه } \overrightarrow{AC}(-6; 0; 6)$$

$$BC = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ ومنه } \overrightarrow{BC}(0; -6; 6)$$

بما أن $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حيث $V = \frac{1}{3} S \times d$ هي مساحة المثلث ABC و d هو بُعد النقطة D عن المستوي (P) .

لتكن I منتصف $[AB]$ ومنه $I(4;4;1)$

$$d = \frac{|-1-1-1-9|}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} , \quad S = \frac{BC \times AI}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 18au$$

$$V = \frac{1}{3} \times 18 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}uv \text{ وعليه}$$

3. (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 12\sqrt{3}$

أ - تبين أن (S) هي سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{M\Omega} \text{ ومنه } ABCD \text{ مركز رباعي الوجوه } \Omega$$

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 12\sqrt{3} \text{ معناه } \|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12\sqrt{3} \text{ أي } \Omega M = 3\sqrt{3}$$

إذن (S) هي سطح الكرة الذي مركزه Ω ونصف قطره $3\sqrt{3}$.

ب - كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) .

تذكير: المعادلة الديكارتية لسطح الكرة الذي مركزه $\omega(x_0; y_0; z_0)$ ونصف قطره R هي

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) هي $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 27$

التحقق أن (S) تشمل النقط A, B, C, D .

$$\Omega A = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ومنه } \overrightarrow{\Omega A}(5; -1; -1)$$

$$\Omega B = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ومنه } \overrightarrow{\Omega B}(-1; 5; -1)$$

$$\Omega C = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ومنه } \overrightarrow{\Omega C}(-1; -1; 5)$$

$$\Omega D = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ومنه } \overrightarrow{\Omega D}(-3; -3; -3)$$

إذن (S) تشمل النقط A, B, C, D .

ج - استنتاج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها.

بما أن النقط A, B, C تنتمي للمستوي (P) وتنتمي لسطح الكرة (S) فإن (P) و (S) يتقاطعان وفق الدائرة التي تشمل النقط A, B, C أي يتقاطعان وفق الدائرة (C) .

تمرين 28

I منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$ و H نقطتان من الفضاء

(1) بَيِّنْ أَنَّهُ، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = MI^2 - ID^2$

(2) استنتج أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ هي سطح كرة (S) يطلب تعيين مركزه ونصف قطره.

Π الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(3; 0; 0), \quad B(0; 6; 0), \quad C(0; 0; 4), \quad D(-5; 0; 1)$$

- (1) أ) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
 ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .
 ج) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
 (2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC) .
 (3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) ؛ احسب إحداثيات النقطة H .
 (4) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة لسطح الكرة (S) المذكورة في الجزء I.
 (5) نعتبر النقطة $N\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$.
 أ) أثبت أن N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .
 ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل ☺

الجزء I.

- (1) إثبات أنه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = MI^2 - ID^2$.
 $\vec{MH} = -\vec{ID}$ فإن $[DH]$ منتصف القطعة المستقيمة MI وبما أن $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = (\vec{MI} + \vec{ID})(\vec{MI} + \vec{IH})$
 ومنه $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = (\vec{MI} + \vec{ID})(\vec{MI} - \vec{ID}) = MI^2 - ID^2$.
 (2) استنتاج أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = 0$ هي سطح كرة (S)
 $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = 0$ تكافئ $MI^2 - ID^2 = 0$ و تكافئ $MI = ID$ بالتالي مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزه I ونصف قطره ID .

الجزء II.

- (1) أ) التحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
 لدينا $\vec{AB}(-3;6;0)$ ، $\vec{AC}(-3;0;4)$ و $\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{6}$ إذن الشعاعان \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا
 ومنه النقط A ، B و C تعين مستويا.
 ب) تبين أن الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .
 لدينا $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 4(-3) + 2(6) + 3(0) = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 4(-3) + 2(0) + 3(4) = 0$
 ومنه \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} وبالتالي \vec{n} ناظم للمستوي (ABC) .
 ج) كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
 معادلة المستوي (ABC) من الشكل $4x + 2y + 3z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (ABC) فإن
 $4(3) + d = 0$ ومنه $d = -12$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $4x + 2y + 3z - 12 = 0$.
 (2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC) .
 بما أن (Δ) يعامد (P) فإن \vec{n} هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)
 من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من المستقيم (Δ) لدينا: $\vec{DM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ أي } (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x + 5 = 4t \\ y = 2t \\ z - 1 = 3t \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

- (3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

حساب احداثيات النقطة H.

H هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC) .

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \dots\dots\dots (1) \\ y = 2t \dots\dots\dots (2) \\ z = 1 + 3t \dots\dots\dots (3) \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \dots\dots\dots (4) \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد: $4(-5 + 4t) + 2(2t) + 3(1 + 3t) - 12 = 0$

$$\begin{cases} x = -5 + 4(1) \\ y = 2(1) \\ z = 1 + 3(1) \end{cases} \quad \text{ومنه } 29t - 29 = 0 \text{ أي } t = 1 \text{ إذن } H(-1; 2; 4) \text{ وعليه}$$

(4) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

يمكن حساب المسافة بطريقتين

$$\text{طريقة 1: } d(D; (ABC)) = \frac{|4(-5) + 2(0) + 3(1) - 12|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

$$\text{طريقة 2: } d(D; (ABC)) = DH$$

$$\text{لدينا } \overline{DH}(4; 2; 3) \text{ وعليه } DH = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29} \text{ إذن } d(D; (ABC)) = \sqrt{29}$$

كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

تعيين احداثيات I.

$$I\left(-3; 1; \frac{5}{2}\right) \text{ إذن } z_I = \frac{z_D + z_H}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_I = \frac{y_D + y_H}{2} = 1, \quad x_I = \frac{x_D + x_H}{2} = -3$$

$$ID = \frac{DH}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$MI = ID \text{ معناه } (x+3)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \text{ وهي معادلة السطح (S).}$$

$$(5) \text{ نعتبر النقطة } N\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$$

(أ) إثبات أن N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

تكون N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) إذا تحقق ما يلي: $\overline{CN} \perp \overline{AB}$ و $N \in (AB)$

$$\text{لدينا } \overline{CN}\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 4\right) \text{ ومنه } \overline{CN} \cdot \overline{AB} = \frac{12}{5}(-3) + \frac{6}{5}(6) + 0(0) = 0 \text{ وهذا يعني أن } \overline{CN} \perp \overline{AB}$$

$$\text{ولدينا } \overline{AN}\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; 0\right) \text{ و } \overline{AB}(-3; 6; 0) \text{ ومنه } \overline{AB} = 5\overline{AN} \text{ إذن الشعاعان } \overline{AB} \text{ و } \overline{AN} \text{ مرتبطان خطياً ومنه}$$

N تنتمي للمستقيم (AB) وبالتالي N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD.

$$V = \frac{1}{3} S \times DH \text{ حيث } S \text{ هي مساحة المثلث } ABC.$$

$$\text{لدينا } AB = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}, \quad CN = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{36}{25} + 16} = \sqrt{\frac{580}{25}} = \sqrt{\frac{116}{5}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{29} \times \sqrt{29} = 29uv \text{ وعليه } S = \frac{1}{2} AB \times CN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{29} \text{ ومنه}$$

تمرين 29

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(3; -1; 2), B(1; 1; -2), G(4; -2; 4) \text{ والمستوي } (P) \text{ الذي معادلته } x - 2y + 3z + 8 = 0.$$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ؛ ثم عيّن إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P) .

2. أ - بيّن أن G تنتمي للمستقيم (AB) وأنها مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب - عيّن طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\| -3\vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} - \vec{MB} \|$.

3 أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) ، ثم عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

ب - استنتج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) .

4. أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (AGH) ، ثم استنتج معادلة ديكرتية له.

ب - بيّن أنّ المستويين (P) و (AGH) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

الحل

1. كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)

المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\vec{AB}(-2; 2; -4)$

$M(x; y; z) \in (AB)$ معناه $\vec{AM} = t\vec{AB}$ حيث t عدد حقيقي

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 3 = -2t \\ y + 1 = 2t \\ z - 2 = -4t \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

تعيين إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P) .

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ نحل الجملة } \begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \\ 3 - 2t - 2(-1 + 2t) + 3(2 - 4t) + 8 = 0 \\ 3 - 2t + 2 - 4t + 6 - 12t + 8 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } t = \frac{19}{18}$$

$$\text{وعليه } \begin{cases} x = 3 - 2\left(\frac{19}{18}\right) \\ y = -1 + 2\left(\frac{19}{18}\right) \\ z = 2 - 4\left(\frac{19}{18}\right) \end{cases} \text{ إذن } L\left(\frac{8}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9}\right)$$

2. أ - تبين أن G تنتمي للمستقيم (AB) .



$$t = -\frac{1}{2} \quad \text{إذن من أجل } t = -\frac{1}{2} \text{ نجد النقطة } G \text{ من المستقيم } (AB). \quad \left\{ \begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 = 3 - 2t \\ -2 = -1 + 2t \\ 4 = 2 - 4t \end{array} \right. \quad \text{معناه } G \in (AB)$$

تبيين أن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

لدينا G تنتمي للمستقيم (AB) من أجل $t = -\frac{1}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$

تكافئ $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ وتكافئ $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ومنه $-3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ إذن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ -3 و 1 على الترتيب.

ب - تعيين طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

G مرجح الجملة $\{(A; -3), (B; 1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا $-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$ ولدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

$$MG = \frac{\|\overrightarrow{BA}\|}{2} \quad \text{أي} \quad \|-2\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \quad \text{معناه} \quad \|-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$$

ولدينا $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$ ومنه $MG = \sqrt{6}$ وبالتالي (E) هي سطح الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

3 أ - كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن $\vec{n}(1; -2; 3)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$M(x; y; z) \in (\Delta)$ معناه $\overrightarrow{GM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{array} \right. \quad \text{أي} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 4 = t \\ y + 2 = -2t \\ z - 4 = 3t \end{array} \right. \quad \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 4 = t \\ y + 2 = -2t \\ z - 4 = 3t \end{array} \right.$$

تعيين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{array} \right. \quad \text{نحل الجملة} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4 + 3t \\ x - 2y + 3z + 8 = 0 \end{array} \right. \quad \text{ومنه} \quad 4 + t + 4 + 4t + 12 + 9t + 8 = 0 \quad \text{ومنه} \quad t = -2$$

وعليه $H(2; 2; -2)$

ب - استنتاج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي لكل نقطة من المستوي (P) على المستقيم (Δ) هي نقطة تقاطعهما

وبما $L \in (P)$ فإن المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) هي LH .

$$LH = \sqrt{\frac{100}{81} + \frac{64}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{\sqrt{168}}{9} \quad \text{ومنه} \quad \overrightarrow{LH} \left(\frac{10}{9}; \frac{8}{9}; \frac{2}{9} \right)$$

4. أ - كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (AGH)

لدينا $\overline{AG}(1;-1;2)$ ، $\overline{AH}(-1;3;-4)$ و $\frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{1}$ ومنه النقط A ، G و H تعين مستويا.

معناه $M(x;y;z) \in (AGH)$ حيث $\overline{AM} = \alpha \overline{AG} + \beta \overline{AH}$ عدنان حقيقيان.

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + 3\beta \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 3 = \alpha - \beta \\ y + 1 = -\alpha + 3\beta \\ z - 2 = 2\alpha - 4\beta \end{cases} \text{ ومنه } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

استنتاج معادلة ديكرتية له.

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \dots\dots\dots (1) \\ y = -1 - \alpha + 3\beta \dots\dots\dots (2) \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ بضرب المعادلة (1) بـ } -1 \text{ و بجمع (1) و (2) و (3) نجد } -x + y + z + 2 = 0$$

وهي معادلة المستوي (AGH) .

ب - تبين أن المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}'(-1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (AGH)

و $\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$ إذن الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان (AGH) و (P) متقاطعان وفق مستقيم (d) .

$$\text{المستقيم (d) معرف بالجملة } \begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ -x + y + z + 2 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد } -y + 4z + 10 = 0$$

ومنه $y = 4z + 10$ بالتعويض في (1) نجد $x - 2(4z + 10) + 3z + 8 = 0$ ومنه $x = 5z + 12$

$$\text{وبوضع } z = t \text{ نجد } \begin{cases} x = 5t + 12 \\ y = 4t + 10 \\ z = t \end{cases} \text{ (d):}$$

تمرين 30

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(8;0;8) , B(10;3;10) , C(10;1;6) \text{ و } D(6;5;4)$$

$$\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases} \text{ (d) المستقيم } \Delta \text{ المعرف بتمثيله الوسيطي } (t \in \mathbb{R})$$

1- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطتين A و B .

2- بين أن المستقيمين Δ و (d) ليسا من نفس المستوي.

3- ليكن المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (d) ويوازي Δ .

أ - بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي (P) .

ب - أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) .

ج - نقطة كيفية من المستقيم Δ ، بين أن بُعد M عن المستوي (P) مستقل عن اختيار النقطة M .

د - أثبت أن C هي المسقط العمودي للنقطة D على (P) .

4- ادرس الوضع النسبي للمستويين (P) و (xOy) .



الحل

1- كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطتين A و B .

المستقيم (d) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$.

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستقيم (d) لدينا: $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{ومنه } (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم } (d) \begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$$

2- إثبات أن المستقيمين (Δ) و (d) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(3;2;-2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (d) .

إذن $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ إذن \vec{u} و \overrightarrow{AB} غير مرتبطين خطيا ومنه المستقيمان (Δ) و (d) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (Δ) و (d) .

$$\begin{cases} -5 + 3t = 8 + 2\lambda \dots (1) \\ 1 + 2t = 3\lambda \dots (2) \\ -2t = 8 + 2\lambda \dots (3) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

بجمع (2) و (3) نجد $1 = 8 + 5\lambda$ ومنه $\lambda = -\frac{7}{5}$.

$$\text{بتعويض قيمة } \lambda \text{ في (1) و (2) و (3) نجد: } \begin{cases} t = \frac{51}{15} \\ t = -\frac{13}{5} \\ t = -\frac{13}{5} \end{cases} \text{ إذن تنافض}$$

ومنه (Δ) و (d) غير متقاطعين.

بما أن (Δ) و (d) غير متوازيين وغير متقاطعين فهما ليسا من نفس المستوي.

3- ليكن المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (d) ويوازي (Δ) .

أ- إثبات أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي (P) .

(P) يشمل المستقيم (d) ويوازي (Δ) وبما أن (d) لا يوازي (Δ) إذن \vec{u} و \overrightarrow{AB} هما شعاعي توجيه للمستوي (P)

$$\text{ولدينا } \vec{n} \cdot \vec{u} = 2(3) - 2(2) - 2 = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(2) - 2(3) + 2 = 0$$

ومنه \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \vec{u} و \overrightarrow{AB} وبالتالي \vec{n} ناظمي للمستوي (P) .

ب- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

المستوي (P) له معادلة من الشكل $2x - 2y + z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (P) فإن

$$2x - 2y + z - 24 = 0 \text{ هي معادلة المستوي } (P) \text{ وعليه معادلة المستوي } (P) \text{ هي } d = -24 \text{ ومنه } 2(8) - 2(0) + 8 + d = 0$$

ج- M نقطة كيفية من المستقيم (Δ) .

إثبات أن بُعد M عن المستوي (P) مستقل عن اختيار النقطة M .

$$d(M;P) = \frac{|2(-5+3t) - 2(1+2t) - 2t - 24|}{\sqrt{4+2+1}} = \frac{36}{9} = 4$$

إذن مهما تكن النقطة M من (Δ) فإن بُعدها عن المستوي (P) ثابت وهو $d = 4$.

د - إثبات أن C هي المسقط العمودي للنقطة D على (P) .

$$C \in (P) \text{ ومنه } 2x_C - 2y_C + z_C - 24 = 2(10) - 2 + 6 - 24 = 0$$

ولدينا $\overrightarrow{CD}(-4;4;-2)$ ومنه $\overrightarrow{CD} = -2\vec{n}$ ومنه الشعاعان \overrightarrow{CD} و \vec{n} مرتبطان خطياً.

إذن C هي المسقط العمودي للنقطة D على (P) .

4- دراسة الوضع النسبي للمستويين (P) و (xOy) .

المستوي (xOy) معادلته $z = 0$.

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 24 = 0 \dots (1) \\ z = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

نعوض (2) في (1) نجد $2x - 2y - 24 = 0$ ومنه $x = y + 12$.

$$\begin{cases} x = 12 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \text{ وبوضع } y = t \text{ نجد } (t \in \mathbb{R})$$

ومن المستويين (P) و (xOy) يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة $K(12;0;0)$ ويوازي الشعاع $\vec{v}(1;1;0)$.

تمرين 31 ☺ بكالوريا تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(1) أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

ب) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

(2) أ) أثبت أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P) .

ب) بيّن أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .

(3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاعاً ناظماً له.

ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

(4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ب) استنتج مساحة المثلث ACD .

الحل ☺

(1) أ) تعيين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 3+2t=1 \dots\dots\dots(1) \\ -2-2t=-1-t' \dots\dots\dots(2) \\ 1-t=4+2t' \dots\dots\dots(3) \end{cases} \text{ من (1) نجد } t=-1 \text{ بالتعويض عن } t \text{ في (2) نجد } t'=-1-t=0$$

ومنه $t'=-1$ وبتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطيين لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب نجد

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \text{ إذن المستقيمان } (\Delta_1) \text{ و } (\Delta_2) \text{ يتقاطعان في النقطة } B(1;0;2).$$

ب) تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_2) وهما أساس للمستوي (P) .
لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M \in (P)$ معناه $\vec{BM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ و $\vec{BM}(x-1;y;z-2)$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t-t' \\ z=2-t+2t' \end{cases} \text{ أي } (t;t') \in \mathbb{R}^2 \text{ ومنه } \begin{cases} x-1=2t \\ y=-2t-t' \\ z-2=-t+2t' \end{cases} (t;t') \in \mathbb{R}^2$$

(2) أ) إثبات أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P) .

$$\begin{cases} 6=1+2t \dots\dots\dots(1) \\ 4=-2t-t' \dots\dots\dots(2) \\ 4=2-t+2t' \dots\dots\dots(3) \end{cases} \text{ نفرض أن } A \text{ تنتمي للمستوي } (P) \text{ إذن}$$

$$\begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ t'=1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ 4=5-t' \\ 4=-\frac{1}{2}+2t' \end{cases} \text{ نجد (3) و (2) بالتعويض في (1) نجد } t=\frac{5}{2}$$

إذن A لا تنتمي للمستوي (P) .

ب) تبين أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .

تكون B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان:

$B \in (P)$ و \vec{BA} شعاع ناظمي للمستوي (P)

$$\vec{BA} \cdot \vec{v} = 5 \times 0 + 4(-1) + 2(2) = 0 \text{ و } \vec{BA} \cdot \vec{u} = 5 \times 2 + 4(-2) + 2(-1) = 0 \text{ لدينا } \vec{BA}(5;4;2) \text{ و } \vec{BA} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{BA} \perp \vec{v} \text{ بالتالي } \vec{BA} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \text{ وبما أن } B \in (P) \text{ فإن } B \text{ هي}$$

المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .

(3) أ) تعيين معادلة ديكرتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

معادلة المستوي (Q) من الشكل $5x+y-7z+d=0$ وبما أن $A \in (Q)$ فإن $5(6)+4-7(4)+d=0$

ومنه $d=-6$ وعليه $5x+y-7z-6=0$ هي معادلة للمستوي (Q)

ب) تعيين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

تعيين إحداثيات C نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_1) .

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

وعليه $5(3+2t) - 2 - 2t - 7(1-t) - 6 = 0$ ومنه $35t = 0$ أي $t = 0$

إذن $C(3; -2; 1)$.

تعيين إحداثيات D نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_2) .

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

وعليه $5 - 1 - t' - 7(4 + 2t') - 6 = 0$ ومنه $-15t' - 30 = 0$ أي $t' = -2$

إذن $D(1; 1; 0)$.

(4) أ) تعيين طبيعة المثلث BCD .

$$BC = \sqrt{4+4+1} = 3 \quad \text{ومنه } \overline{BC}(2; -2; -1)$$

$$BD = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad \text{ومنه } \overline{BD}(0; 1; -2)$$

$$CD = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \quad \text{ومنه } \overline{CD}(-2; 3; -1)$$

ومنه $BC^2 + BD^2 = CD^2$ إذن المثلث BCD قائم في B .

طريقة 2: لدينا $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 - 2(-1) - 1(2) = 0$ وهذا يعني أن $\vec{u} \perp \vec{v}$ ومنه المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدان ومتقاطعان في النقطة B وبما أن $C \in (\Delta_1)$ و $D \in (\Delta_2)$ فإن المثلث BCD قائم في B .

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه يعطى كما يلي $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times AB \quad (AB \text{ هي المسافة بين } A \text{ والمستوي } (BCD) = (P))$$

$$S_{BCD} = \frac{BC \times BD}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} ua, \quad AB = 3\sqrt{5} \quad \text{لدينا}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} \times 3\sqrt{5} = \frac{15}{2} uv \quad \text{وعليه}$$

(ب) استنتاج مساحة المثلث ACD .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ACD} \times d(B; (Q)) \quad \text{لأن المستوي } (ACD) \text{ هو المستوي } (Q).$$

$$d(B; (Q)) = \frac{|5-14-6|}{5\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{ولدينا } S_{ACD} = \frac{3V_{ABCD}}{d(B; (Q))}$$

$$S_{ACD} = \frac{3V_{ABCD}}{d(B; (Q))} = \frac{3 \times \frac{15}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} ua \quad \text{وعليه}$$

تمرين 32 ☹ بكالوريا رياضيات 2013

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي (P) المعروف بالتمثيل الوسيطى: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطيان حقيقيان.

1. أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان .

ب - بين أن تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$$

ج - احسب المسافة بين النقط D والمستوي (ABC) ، والمسافة بين النقط D والمستوي (P) ، ثم استنتج

المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ)

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقط D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P) .

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب - بين أن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثم عين إحداثيات H .

ج - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ) .

الحل :

1. أ - إثبات أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB}(2;2;-2) \text{ و } \overrightarrow{AC}(-2;-7;-8) \text{ و } \frac{-2}{2} \neq \frac{-7}{2}$$

إذن الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - التحقق أن الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم كتابة معادلة ديكارتية له.

$$\text{لدينا } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(2) - 2(2) - 2 = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-2) - 2(-7) - 8 = 0$$

ومنه \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وبالتالي \vec{n} ناظم للمستوي (ABC) .

معادلة المستوي (ABC)

(ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ و $\vec{AM}(x;y;z-1)$

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ معناه $3x - 2y + z - 1 = 0$ وهي معادلة للمستوي (ABC) .

2. أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم تبين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \dots\dots\dots (1) \\ y = 1 - 2\alpha \dots\dots\dots (2) \\ z = 4 + \alpha + \beta \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $x + y = 2 + \alpha + \beta$ ومنه $x + y - 2 = \alpha + \beta$ ولدينا من (3) $z - 4 = \alpha + \beta$ ومنه $x + y - 2 = z - 4$ وعليه $x + y - z + 2 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (P).

تبيين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$\vec{n}(3; -2; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(1; 1; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P). $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3(1) - 2(1) - 1 = 0$ وهذا يعني \vec{n} يعامد \vec{n}' ومنه (ABC) و (P) متعامدان.

ب - تبيين أن تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيط:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة (ABC) و (P) نجد:

$$3(-2+t) - 2(-7+4t) + (-7+5t) - 1 = 0$$

$$\text{و } (-2+t) + (-7+4t) - (-7+5t) + 2 = 0$$

وعليه تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ).

ج - المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

$$d_1 = \frac{|3(-3) - 2(4) + 4 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

المسافة بين النقطة D والمستوي (P).

$$d_2 = \frac{|-3 + 4 - 4 + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

استنتاج المسافة d_3 بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المستويان (ABC) و (P) متعامدان ومنه حسب نظرية فيثاغورث $d_3^2 = d_1^2 + d_2^2$

$$\text{ومنه } d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \text{ وعليه } d_3 = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ - كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (Q).

(ABC) و (P) يتقاطعان في المستقيم (Δ) وبما أن (Q) يعامد (ABC) و (P) فإنه

يعامد المستقيم (Δ) أي أن $\vec{u}(1; 4; 5)$ شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظمي للمستوي (Q).

معادلة المستوي (Q) من الشكل $x + 4y + 5z + d = 0$ وبما أن D تنتمي للمستوي (Q)



فإن $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d=-33$ وعليه $(Q): x+4y+5z-33=0$.

ب - تبين أن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H .

بما أن $(ABC) \cap (P) = (\Delta)$ فإن $(ABC) \cap (P) \cap (Q) = (Q) \cap (\Delta)$.

بما أن (Δ) يعامد (Q) فإن (Δ) و (Q) يتقاطعان في نقطة H .

تعيين H نقطة تقاطع (Δ) و (Q) .

$$\begin{cases} x = -2+t \dots\dots\dots (1) \\ y = -7+4t \dots\dots\dots (2) \\ z = -7+5t \dots\dots\dots (3) \\ x+4y+5z-33=0 \dots\dots (4) \end{cases}$$

إحداثيات H هي حل للجملية

ومنه $-2+t+4(-7+4t)+5(-7+5t)-33=0$ وعليه $t=\frac{7}{3}$ إذن $H\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

ج - حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) .

المسقط العمودي لكل نقطة من (Q) على (Δ) هي النقطة H لأن (Δ) عمودي على (Q) .

وبما أن D نقطة من (Q) فإن H هي المسقط العمودي للنقطة D على (Δ) .

بالتالي $d(D;(\Delta))=DH$.

$$DH = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{9} + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{129}{9}} = \sqrt{\frac{43}{3}} \text{ ومنه } \overline{DH}\left(\frac{10}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

تمرين 33 ⊗ بكالوريا تقني رياضي 2009

1- نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط:

$$C(-1; 0; -6), B(-1; 0; -2), A(1; 1; 2)$$

- بَيِّنْ أنَّ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على

المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2- لتكن S مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تُحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

- بَيِّنْ أنَّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R .

3- نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

أ - عَيِّنْ إحداثيات النقطة G ثم تأكد أنها تنتمي إلى S .

ب - أكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G .

الحل: ⊗

تبين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على

المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

$$AM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \text{ ومنه } AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

$$BM^2 = (x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 \text{ ومنه } BM = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

$$MA^2 - MB^2 = 1 \text{ تكافئ } [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2] - [(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2] = 1$$

وتكافئ $4x - 2y - 8z = 0$ أي $-2x - y - 4z = 0$ وهي معادلة مستو شعاعه الناظم $\overrightarrow{AB}(-2; -1; -4)$ ومنه المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) .

2- لنكن S مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

- إثبات أن S هي سطح كرة تعيين مركزها ω ونصف قطرها R .

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \text{ معناه } (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 - 6 = 0$$

ومنه $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ إذن S هي سطح كره مركزها $\omega(1; 1; 1)$

وطول نصف قطرها $R = 3$.

$$3 - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0 \text{ نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة}$$

أ - تعيين إحداثيات النقطة G ثم التأكد أنها تنتمي إلى S .

$$G \text{ هي مرجح الجملة } \{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\} \text{ وعليه } x_G = \frac{x_A - x_B + x_C}{1 - 1 + 1} = 1$$

$$y_G = \frac{y_A - y_B + y_C}{1 - 1 + 1} = 1, \quad z_G = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = -2 \text{ إذن } G(1; 1; -2)$$

التأكد أن G تنتمي إلى S .

يمكن التأكد بسهولة أن G تنتمي إلى S بتعويض إحداثيات G في معادلة S نجد:

$$(1-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2 = 9 \text{ وهذا يعني أن } G \text{ تنتمي إلى } S.$$

ب - كتابة معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G .

المستوي (Q) ناظمه الشعاع $\overrightarrow{\omega G}$ ويشمل النقطة G . ولدينا $\overrightarrow{\omega G}(0; 0; -3)$.

ومنه معادلة (Q) من الشكل $-3z + d = 0$ وبما أن (Q) يشمل G فإن $-3(-2) + d = 0$ ومنه $d = -6$

وعليه $-3z - 6 = 0$ ومنه $z + 2 = 0$ هي معادلة للمستوي (Q) .

تمرين 34 (بكالوريا تقني رياضي 2012)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوي الذي

$$-4x - 3y + 1 = 0 \text{ معادلة ديكارتية له و } (D) \text{ المستقيم الذي } \begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k \\ z = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي له}$$

1. تحقق أن المستقيم (D) محتوي في المستوي (P) .

2. أ - أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1; 1; 0)$ و $\vec{u}(4; 1; 3)$ شعاع توجيه له.

ب - عين إحداثيات تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

3. بين أن: $3x - 4z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ) .

4. $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

أ - احسب المسافة بين M و كل من (P) و (Q) .

ب - أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي

اتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.

5. عين مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

الحل:

1. التحقق أن المستقيم (D) محتوي في المستوي (P) .

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) في معادلة المستوي (P) نجد:

$$-4(k) - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}k\right) + 1 = -4k - 1 + 4k + 1 = 0$$

2. أ - كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x; y; z)$ من (Δ) ومنه $\vec{AM} = \lambda \vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}$ و $\vec{AM}(x-1; y-1; z)$

$$\begin{cases} x-1=4\lambda \\ y-1=\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \text{ ومنه } (\lambda \in \mathbb{R})$$

ب - تعيين إحداثيات تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

$$\begin{cases} k=1+4\lambda \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k = 1+\lambda \dots\dots\dots (2) \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k = 3\lambda \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

$$\begin{cases} k=1+4\lambda \dots\dots\dots (1) \\ 1-4k = 3+3\lambda \dots\dots\dots (2) \\ -3+3k = 12\lambda \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} k=1+4\lambda \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k = 1+\lambda \dots\dots\dots (2) \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k = 3\lambda \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

نعوض k بقيمتها من (1) في (2) نجد $1-4(1+4\lambda) = 3+3\lambda$ أي $-19\lambda = 6$ ومنه $\lambda = -\frac{6}{19}$

بالتعويض في (1) نجد $k = 1+4\left(-\frac{6}{19}\right)$ أي $k = -\frac{5}{19}$

بتعويض قيمتي k و λ في (3) نجد: $-3+3\left(-\frac{5}{19}\right) = 12\left(-\frac{6}{19}\right)$ أي $-\frac{72}{19} = -\frac{72}{19}$ محققة.

نتيجة: المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $\left(-\frac{5}{19}; \frac{13}{19}; \frac{18}{19}\right)$.

3. إثبات أن: $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ) .

بما أن المستقيمين (D) و (Δ) متقاطعان فإنه يوجد مستو وحيد يشملهما.

$$(Q) \quad 3(k) - 4\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k\right) - 3 = 3k + 3 - 3k - 3 = 0$$

بنفس الطريقة مع المستقيم (Δ) : $3(1+4\lambda) - 4(3\lambda) - 3 = 0$ ومنه المستقيم (D) محتو في المستوي (Q) .

إذن $3x - 4z - 3 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ) .

أ - حساب المسافة بين M و كل من (P) و (Q) .

$$d(M; (Q)) = \frac{|3x - 4z - 3|}{5}, \quad d(M; (P)) = \frac{|-4x - 3y + 1|}{5}$$

ب - إثبات أن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي

إتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكرتية لكل منهما.

$$\frac{|-4x - 3y + 1|}{5} = \frac{|3x - 4z - 3|}{5} \quad \text{معناه} \quad d(M; (P)) = d(M; (Q))$$

وتكافئ $|-4x - 3y + 1| = |3x - 4z - 3|$ أي $-4x - 3y + 1 = 3x - 4z - 3$ أو

$$-7x - 3y + 4z + 4 = 0 \quad \text{أو} \quad -4x - 3y + 1 = -(3x - 4z - 3)$$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي إتحاد مستويين

$$(P_1): -7x - 3y + 4z + 4 = 0 \quad \text{و} \quad (P_2): x + 3y + 4z + 2 = 0.$$

5. تعيين مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4z - 3 = 0 \\ x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

الجملة هي تقاطع المستويات الثلاثة (P) و (Q) و (P_2) .

لدينا $(P) \cap (Q) = (D)$ لندرس تقاطع (D) والمستوي (P_2) .

$$\text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k \\ z = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k \\ x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad k + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}k\right) + 4\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k\right) + 2 = 0$$

$$\text{أي} \quad k - 4k + 3k + 1 - 3 + 2 = 0 \quad \text{ومنه} \quad 0 = 0 \quad (D) \text{ محتو في } (P_2).$$

ومنه مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة هي المستقيم (D) .

تمرين 34

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط: $A(-2; 1; 2)$ ، $B(2; 3; 0)$

و $C(-2; 0; 1)$

لتكن (P) مجموعة النقط M بحيث $AM = BM$

$$-1 \quad \text{بين أن} \quad (P) \text{ هو المستوي الذي معادلته الديكرتية: } 2x + y - z - 1 = 0$$

- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار من C والموازي للمستوي (P) .
- 3- أ - حدد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (D) المار من C والعمودي على المستوي (P) .
 ب - احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) والمسافة بين النقطة A والمستوي (P)
- 4- أ - حدد معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.
 ب - حدد تقاطع المستوي (P) وسطح الكرة (S) .

الحل ☺

- 1- تبين أن (P) هو المستوي الذي معادلته الديكارتية: $2x + y - z - 1 = 0$
 (P) هو مجموعة النقط M بحيث $AM = BM$ ومنه (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.
 لتكن I منتصف $[AB]$ ومنه $I(0; 2; 1)$ ولدينا $2x_I + y_I - z_I - 1 = 2(0) + 2 - 1 - 1 = 0$
 و $\overline{AB}(4; 2; -2)$ إذن شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x + y - z - 1 = 0$.
 المستوي ذو المعادلة $2x + y - z - 1 = 0$ شعاعه الناظمي \overline{AB} وهو يشمل I منتصف $[AB]$ إذن هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ أي هو المستوي (P) .

طريقة ثانية:

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$BM = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2} \text{ و } AM = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

$$AM = BM \text{ تعني } (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2$$

بعد التبسيط نجد

$$AM = BM \text{ معناه } 8x + 4y - 4z - 4 = 0 \text{ أي } 2x + y - z - 1 = 0 \text{ وهي معادلة ديكارتية لـ } (P).$$

- 2- تحديد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار من C والموازي للمستوي (P) .

المستوي (Q) يوازي (P) إذن معادلة المستوي (Q) من الشكل $2x + y - z + d = 0$ وبما أن النقطة C تنتمي للمستوي (Q) فإن $2(-2) + 0 - 1 + d = 0$ ومنه $d = 5$ وعليه $2x + y - z + 5 = 0$ معادلة للمستوي (Q)

- 3- أ - تحديد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (D) المار من C والعمودي على المستوي (P) .

(D) عمودي على (P) ومنه $\vec{u}(2; 1; -1)$ شعاع ناظمي لـ (P) يكون شعاع توجيه للمستقيم (D) .
 لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (D) \text{ معناه } \overline{CM} = t\vec{u} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي و } \overline{CM}(x+2; y; z-1) \text{ و } t\vec{u}(2t; t; -t)$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ أي } (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x + 2 = 2t \\ y = t \\ z - 1 = -t \end{cases} \text{ معناه } \overline{CM} = t\vec{u} \text{ } (t \in \mathbb{R})$$

- ب - حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) ومنه $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

لدينا $H \in (D)$ ومنه $H(-2+2t; t; 1-t)$ ومنه $\vec{AH}(2t; t-1; -1-t)$.

$\vec{u} \cdot \vec{AH} = 0$ معناه $2(2t) + (t-1) + t + 1 = 0$ أي $6t = 0$ إذن $t = 0$ إذن $H(-2; 0; 1)$ وبالتالي

H منطبقة على C أي C هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

ومنه $d(A; (D)) = AC$.

$d(A; (D)) = \sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{2}$ إذن $\vec{AC}(0; -1; -1)$

المسافة بين النقطة A والمستوي (P) .

$$d(A; (P)) = \frac{|2(-2) + 1 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6}$$

4- أ - تحديد معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$M \in (S)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ بحيث $\vec{MA}(-2-x; 1-y; 2-z)$ و $\vec{MB}(2-x; 3-y; -z)$

ومنه $(-2-x)(2-x) + (1-y)(3-y) + (2-z)(-z) = 0$

بالتالي المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) هي: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z - 1 = 0$

وتكافئ $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$

ب - تحديد تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S) .

مركز السطح (S) هو $\omega(0; 2; 1)$ ونصف قطره هو $R = \sqrt{6}$.

$$d(\omega; (P)) = \frac{|2(0) + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{6}} = 0$$

بما أن $d(\omega; (P)) = 0$ فإن المستوي (P) و سطح الكرة (S) يتقاطعان وفق الدائرة الكبيرة في الكرة (S) .

أي الدائرة التي مركزها $\omega(0; 2; 1)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

تمرين 36

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقاط: $A(2; 1; -1)$ ، $B(1; -1; 3)$ ،

$C(-\frac{3}{2}; -2; 1)$ و $D(\frac{7}{2}; -3; 0)$ ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

(1) أ - أحسب إحداثيات النقطة I .

ب - ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $2x + 4y - 8z + 5 = 0$ ؛ بين أن (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له.

(3) أ - جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

ب - بين أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم.

(4) أ - بين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE) .

ب - احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

الحل

(1 أ) إحداثيات النقطة I .

$$I\left(\frac{3}{2}; 0; 1\right) \text{ إذن } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0, \quad x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}$$

(ب) تبين أن (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

لدينا $\vec{n}(2; 4; -8)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 4)$ ومنه $\vec{n} = -2\overrightarrow{AB}$ بالتالي الشعاعان \vec{n} و \overrightarrow{AB} مرتبطان خطيا وعليه \overrightarrow{AB} هو شعاع ناظمي للمستوي (P) .

$$\text{ولدينا } 2x_I + 4y_I - 8z_I + 5 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 4(0) - 8(1) + 5 = 0 \text{ إذن } I \text{ تنتمي للمستوي } (P).$$

ومنه (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

(2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له. لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه يوجد عدد حقيقي } t \text{ بحيث } \overrightarrow{CM} = t\vec{u} \text{ و } \overrightarrow{CM}\left(x + \frac{3}{2}; y + 2; z - 1\right)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x + \frac{3}{2} = t \\ y + 2 = 2t \\ z - 1 = -4t \end{cases} \text{ معناه } \overrightarrow{CM} = t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(3 أ) إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 4t \\ 2x + 4y - 8z + 5 = 0 \end{cases} \text{ وعليه } 2\left(-\frac{3}{2} + t\right) + 4(-2 + 2t) - 8(1 - 4t) + 5 = 0$$

$$\text{أي } -3 + 2t - 8 + 8t - 8 + 32t + 5 = 0 \text{ ومنه } -14 + 42t = 0 \text{ وعليه } t = \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن } x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}, \quad y = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}, \quad z = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \text{ أي } E\left(-\frac{7}{6}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

(ب) تبين أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1; 2; -4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) .

و $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ ومنه الشعاعان \vec{u} و \overrightarrow{AB} مرتبطان خطيا إذن المستقيمان (Δ) و (AB) متوازيان

وبالتالي فهما من نفس المستوي.

استنتاج أن المثلث IEC قائم.

(AB) و (Δ) متوازيان ومنه (Δ) عمودي على (P) في E وبما أن $C \in (\Delta)$

فإن (CE) عمودي على (P) في E وبما أن I تنتمي للمستوي (P) فهذا يعني أن المثلث IEC قائم في E .

(4 أ) تبين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE) .

لدينا $\overline{ID}(2; -3; -1)$ و $\overline{IE}\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ و $\overline{AB}(-1; -2; 4)$.

$$\overline{ID} \cdot \overline{IE} = 2\left(-\frac{8}{3}\right) - 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 1\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3} + \frac{12}{3} + \frac{4}{3} = 0 \quad \text{و} \quad \overline{ID} \cdot \overline{AB} = 2(-1) - 3(-2) - 1(4) = 0$$

اذن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE) .

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

لدينا (ID) عمودي على (AB) إذن فهو عمودي على (CE) لأن (CE) هو المستقيم (Δ) و (Δ) يوازي (AB)

ومنه (ID) عمودي على كل من (CE) و (IE) وبالتالي (ID) يعامد المستوي (ICE)

فتكون النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ICE) .

وعليه حجم رباعي الوجوه $DIEC$ يعطى كما يلي $V = \frac{1}{3} S_{ICE} \times ID$ حيث S_{ICE} هي مساحة المثلث ICE .

$$ID = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \quad \text{و} \quad S_{ICE} = \frac{IE \cdot CE}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{14}}{3} \times \sqrt{14} = \frac{28}{9} uv$$

تمرين 37 (بكالوريا تقني رياضي 2012)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، النقط:

$$C(2; 2; 2), \quad B(0; 4; 0), \quad A(3; 0; 0)$$

1. بين أن النقط A, B, C ليست في استقامة وأن الشعاع $\vec{n}(4; 3; -1)$

عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} .

2. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A, B, C .

3. أ- بين أن: $6x - 8y + 7 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x; y; z)$

من الفضاء حيث: $AM = BM$.

ب- بين أن: $2x - 4y - 4z + 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x; y; z)$

من الفضاء حيث: $AM = CM$.

ج- بين أن (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4. احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

الحل:

1. تبين أن النقط A, B, C ليست في استقامة.

لدينا $\overline{AB}(-3; 4; 0)$ و $\overline{AC}(-1; 2; 2)$ و $\frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{4}$ ومنه الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC} غير مرتبطين خطيا

وبالتالي النقط A, B, C ليست في استقامة.

إثبات أن الشعاع $\vec{n}(4; 3; -1)$ عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} .

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = 4(-3) + 3(4) - 1(0) = 0 \quad \text{و} \quad \vec{n} \cdot \overline{AC} = 4(-1) + 3(2) - 1(2) = 0$$

ومنه $\vec{n}(4; 3; -1)$ عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} .

2. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A, B, C .

بما أن $\vec{n}(4; 3; -1)$ عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} فإنه شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه معادلة المستوي (P) من الشكل $4x + 3y - z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (P) فإن $4(3) + d = 0$ ومنه $d = -12$ وعليه $4x + 3y - z - 12 = 0$ هي معادلة للمستوي (P) .

3. أ - تبين أن: $6x - 8y + 7 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $AM = BM$.

المستوي (P') هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

(P') شعاعه الناظم \overrightarrow{AB} وهو يشمل النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من (P') ومنه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$ مع $\overrightarrow{IM} \left(x - \frac{3}{2}; y - 2; z \right)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \text{ معناه } -3 \left(x - \frac{3}{2} \right) + 4(y - 2) + 0(z) = 0 \text{ ومنه } -3x + 4y - \frac{7}{2} = 0$$

أي $6x - 8y + 7 = 0$ وهي معادلة للمستوي (P') .

ب - تبين أن: $2x - 4y - 4z + 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $AM = CM$.

(P'') هو المستوي المحوري للقطعة $[AC]$. نبين أن $2x - 4y - 4z + 3 = 0$ هي معادلة (P'') .

لتكن I' منتصف $[AC]$ ومنه $I' \left(\frac{5}{2}; 1; 1 \right)$.

(P'') ناظمه الشعاع \overrightarrow{AC} ويشمل النقطة I' ومنه من أجل كل $M(x; y; z)$ من (P'') لدينا $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{I'M} = 0$

$$\text{ومنه } 0 = -1 \left(x - \frac{5}{2} \right) + 2(y - 1) + 2(z - 1) \text{ أي } -x + 2y + 2z - \frac{3}{2} = 0 \text{ وهذه الأخيرة تكافئ}$$

$$2x - 4y - 4z + 3 = 0 \text{ وهي معادلة للمستوي } (P'').$$

ج - تبين أن (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

(P') ناظمه الشعاع \overrightarrow{AB} و (P'') ناظمه الشعاع \overrightarrow{AC} ولدينا الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطياً

وبالتالي (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} 6x - 8y + 7 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 2x - 4y - 4z + 3 = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases} \text{ إذا كانت } M(x; y; z) \text{ نقطة من } (\Delta) \text{ فإن إحداثياتها هي حلول الجملة}$$

$$\text{من (1) نجد } x = \frac{4}{3}y - \frac{7}{6} \text{ نعوض في (2) نجد } 2 \left(\frac{4}{3}y - \frac{7}{6} \right) - 4y - 4z + 3 = 0 \text{ ومنه } z = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{6}$$

$$\text{وبوضع } y = 3t \text{ نجد } \begin{cases} x = 4t - \frac{7}{6} \\ y = 3t \\ z = -t + \frac{1}{6} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4. حساب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي نقطة تقاطع محاوره أي هي نقطة تقاطع (Δ) و (P) .

$$\begin{cases} x = 4t - \frac{7}{6} \\ y = 3t \\ z = -t + \frac{1}{6} \\ 4x + 3y - z - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{تقاطع } (\Delta) \text{ و } (P) \text{ هو حل الجملة}$$

وعليه $4\left(4t - \frac{7}{6}\right) + 3(3t) - \left(-t + \frac{1}{6}\right) - 12 = 0$ ومنه $16t - \frac{28}{6} + 9t + t - \frac{1}{6} - 12 = 0$ أي $26t = \frac{101}{6}$

$$\text{أي } t = \frac{101}{156} \text{ إذن } \begin{cases} x = 4\left(\frac{101}{156}\right) - \frac{7}{6} \\ y = 3\left(\frac{101}{156}\right) \\ z = -\frac{101}{156} + \frac{1}{6} \end{cases} \text{ وعليه } \omega\left(\frac{37}{26}; \frac{101}{52}; -\frac{25}{52}\right)$$