منتديات طموحنا

*** ملتقى الطلبة و الباحثين ***

www.tomohna.com

دروس الدعم والتقوية	الفوج: نهائي علوم تجريبية	إعداد الأستاذ:بختي عبد الرحمن
السنة الدراسية:2008/2007	السلسلة رقم 2	ثانوية عبد المجيد بومادة ورقلة
الفصل الأول	ال-م-تتاليات ال-ع-ددي-ـــــة	bekhtimath@yahoo.fr

التمرين(1)

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وأساسها r بحيث:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 38 \\ v_4 - v_2 = 10 \end{cases}$$

1)أحسب الأساس r والحد الأول v_1.

2)أحسب $S = v_3 + v_4 + ... + v_{27}$

التمرين(2)

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_1 وأساسها r بحيث:

$v_1 = 16$ و $v_6 = -512$

1)أحسب الأساس r.

2)أحسب $S = v_2 + v_3 + ... + v_{10}$

التمرين(3)

أحسب المجاميع التالية

1) $S = 1 + 2 + ... + n$

2) $S = 1 + 3 + 5 ... + (2n+1)$

3) $S = 2^3 + 2^4 + ... + 2^{12}$

التمرين(4)

عين عددين حقيقيين x, y علما أن:

$x, 15, y$ حدود متعاقبة من متتالية هندسية

$x, 25, y$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية

التمرين(5)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0 = 4$ و $n \in N / \ v_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{-2 + v_n}$

1)أحسب v_1, v_2.

2)بين أن: $v_n \succ 3$ لكل عدد طبيعي n.

ماذا تستنتج ؟

3)نضع $u_n = \dfrac{3}{3 - v_n}$

أ-بين أن (u_n) متتالية حسابية

ب- استنتج u_n بدلالة n.

التمرين(6)

(v_n) متتالية معرفة بـــ: $v_0 = 20, v_1 = 6$

$n \in N^* / v_{n+1} = -\dfrac{1}{20} v_n + \dfrac{1}{20} v_{n-1}$

1) أحسب v_2, v_3. هل (v_n) متتالية هندسية أو حسابية ؟ برر الإجابة.

2)نضع

$u_n = v_{n+1} + \dfrac{1}{4} v_n$ ، $w_n = v_{n+1} - \dfrac{1}{5} v_n$

لكل عدد طبيعي n.

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$.

ب- بين أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

ج-أكتب u_n, w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

د- نضع: $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n+1}$

عبر عن S بدلالة v_0, v_1, v_n ثم استنتج S بدلالة n.

التمرين(7)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0 = 2$ و $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2} v_n^{\ 2} + 1}$ لكل عدد طبيعي n.

1)أحسب v_1, v_2.

2) نضع: $u_n = v_n^{\ 2} - 2$ لكل عدد طبيعي n.

أ. بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

ب. استنتج v_n بدلالة n.

3) أ.بين أن: $\sqrt{1+x} \le 1 + \dfrac{x}{2}$ لكل عدد حقيقي x موجب.

ب.استنتج أن: $\sqrt{2} \le v_n \le \sqrt{2}\left[1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

لكل عدد طبيعي n. ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

التمرين(8)

(u_n) متتالية معرفة على N بـــ:

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{2 + u_n}}$ ، $u_0 \in]-1, 0[$

1.بين أن: $-1 \prec u_n \prec 0$ لكل عدد طبيعي n.

2.بين أن (u_n) متزايدة تماما.ثم استنتج أنها متقاربة

3.بين أن: $u_{n+1} \ge \dfrac{u_n}{\sqrt{2 + u_0}}$ حيث $n \in N$.

4. بين أن: $n \in N \ / \ u_{n+1} \ge \dfrac{u_0}{\left(\sqrt{2 + u_0}\right)^n}$

5.استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

التمرين(9)

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين على N بـــ $a_{n+1} = \dfrac{2 a_n b_n}{a_n + b_n}, a_0 = a$

$b_{n+1} = \dfrac{b_n + a_n}{2}, b_0 = b$ حيث

$0 \prec a \prec b$

$\alpha_n = b_n - a_n$.

1)بين أن: $0 \le \alpha_{n+1} \le \dfrac{1}{2} \alpha_n$ حيث $n \in N$

.ثم استنتج أن $0 \le \alpha_n \le \dfrac{b - a}{2^n}$ حيث

$n \in N$

2)بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتين.

3)بين أن: $a_n b_n = ab$ لكل عدد طبيعي n.

ثم حدد نهايتي المتتاليتين (a_n) و (b_n).

التمرين(10)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0 = 1$ ، $v_{n+1} = v_n (v_n + 1)$ حيث $n \in N$

1.بين أن: (v_n) متزايدة واستنتج أن: $v_n \ge 1$ لكل عدد طبيعي n.

التمرين(11)

f الدالة المعرفة على المجال $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ بـــ:

$f(x)=\frac{5x-8}{x-1}$ و (c_f) منحناها البياني.

1)أدرس تغيرات f

2)بين أن: $3\le f(x)\le 5$ لكل $x\in[3;5]$.

3)أنشئ (c_f) .

4) نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين على N بـــ

$a_{n+1}=f(a_n), a_0=3$

$b_{n+1}=f(b_n), b_0=5$

أ)مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتاليتين (a_n) و (b_n) (في نفس المعلم السابق)

ب)قدم تخمينا بخصوص اتجاه التغير والتقارب لكل من (a_n) و (b_n) .

جـــ)بين باستعمال البرهان بالتراجع صحة الآتي

1. $3\le a_n\le 5$ لكل عدد طبيعي n .
2. $a_n\le a_{n+1}$ لكل عدد طبيعي n .
3. $3\le b_n\le 5$ لكل عدد طبيعي n .
4. $b_{n+1}\le a_n$ لكل عدد طبيعي n .

د)برهن أن:

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{3(b_n-a_n)}{(b_n-1)(a_n-1)}$$

لكل عدد طبيعي n .

هـــ)استنتج أن:

$b_{n+1}-a_{n+1}\le\frac{3}{4}(b_n-a_n)$ و $b_n-a_n\ge 0$

لكل عدد طبيعي n .

و)استنتج أن: $n\in N/b_n-a_n\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ى)بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي l .ثم عين القيمة الدقيقة للعدد l .

التمرين(12)

برهن أن المتتالية الثابتة هي متتالية حسابية وهندسية في آن واحد.

التمرين(13)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0=1$ ، $n\in N/\ v_{n+1}=v_n+2n+3$

1)أدرس رتابة (v_n) .

2)برهن أن: $v_n\succ n^2$ لكل عدد طبيعي n .

3) حدد نهاية (v_n) .

4)خمن عبارة v_n بدلالة n ثم برهن صحة تخمينك.

التمرين(14)

(a_n) و (b_n) متتاليتين معرفتين على N بـــ:

$a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+2a_n), a_0=1$

$b_{n+1}=\frac{1}{3}(2b_n+a_n), b_0=7$

(D) مستقيم مزود بمعلم $(O;\vec{i})$.

نعتبر النقطتين $A_n;B_n$ ذاتا الفاصلتين $a_n;b_n$ على الترتيب.

1.مثل النقط $A_0;B_0;A_1;B_1;A_2;B_2$.

2.(α_n) متتالية معرفة بـــ: $\alpha_n=b_n-a_n$ حيث $n\in N$.

بين أن (α_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.أكتب α_n بدلالة n .

3.قارن بين b_n و a_n ثم ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n) وفسر النتائج هندسيا.

4.برهن أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتين.

5.(β_n) متتالية معرفة بـــ: $\beta_n=b_n+a_n$ لكل عدد طبيعي n .

برهن أن: (β_n) متتالية ثابتة.واستنتج أن للقطع $[A_nB_n]$ نفس المنتصف I .

6.برر تقارب المتتاليتين (a_n) و (b_n) ثم احسب نهايتهما.فسر النتيجة هندسيا.

التمرين(15)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0=3$ و $v_{n+1}=2+\frac{1}{v_n}-\frac{2}{v^2{}_n}$ لكل عدد طبيعي n .

1)بين أن (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد2.

2.بين أن: $v^2{}_n\ge v_n$ لكل عدد طبيعي n .

3. بين أن: $v_{n+1}\ge 2v_n$ لكل عدد طبيعي n .

4.استنتج أن: $v_n\ge 2^n$ لكل عدد طبيعي n .

ثم حدد نهاية (v_n) .

2) تحقق أن:

$-x^3+2x^2+x-2=(2-x)(x^2-1)$

3)أدرس رتابة (v_n) .ماذا تستنتج ؟

4)بين أن: $n\in N/\ v_{n+1}-2\le\frac{1}{4}(v_n-2)$.

5) استنتج أن: $n\in N/\ v_n-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

التمرين (16)

f دالة معرفة بجدول تغيراتها التالي:

x	1	5
$f(x)$	2 ↗	4

نعتبر المتتالية (a_n) المعرفتين على N بـــ

$a_{n+1}=f(a_n), a_0=1$

ضع إشارة الجواب الصحيح مكانها مع التبرير.

أ☐ $1\le a_n\le 5$ لكل عدد طبيعي n .

ب☐ $a_n\le a_{n+1}$ لكل عدد طبيعي n .

جـــ☐ (a_n) متزايدة من أجل $a_0=5$.

د☐ إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n $\left|a_n-\frac{5}{2}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

التمرين (17)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0=0$ $v_{n+1}=v_n+2n-11$ $n\in N/$.

1)أحسب ثم مثل عشرون حدا الأولى باستعمال مجدول إكسل . هل تلاحظ خصوصية في التمثيل المحصل عليه ؟ ما هو إن كانت إجابتك نعم ؟

2)باستعمال السؤال 1) خمن في إيجاد عبارة v_n بدلالة n لكل عدد طبيعي n .

3)برهن صحة تخمينك .

حل التمرين(1)

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وأساسها r بحيث:

$$(S)\ldots\begin{cases} v_1+v_2+v_3+v_4=38 \\ v_4-v_2=10 \end{cases}$$

1) حساب الأساس r والحد الأول v_1

بما أن (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وأساسها r فإن:

$v_n=v_1+(n-1)r$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n. ومنه:

$v_2=v_1+r$ ، $v_3=v_1+2r$ ، $v_4=v_1+3r$ نعوض في (S) فنحصل على:

$$\begin{cases} 4v_1+6r=38 \\ 2r=10 \end{cases}$$

ومنه: $\boxed{r=5}$ و $\boxed{v_1=2}$

2) حساب $S=v_3+v_4+\ldots\ldots+v_{27}$

مجموع الحدود المتتابعة من متتالية حسابية هو $\boxed{S=\alpha\frac{v_b+v_c}{2}}$ ...(1)

حيث: عدد حدود المجموع $=\alpha$ ، الحد الأول من المجموع $=v_b$

الحد الأخير من المجموع $=v_c$

$S=v_3+v_4+\ldots\ldots+v_{27}$ إذن: $\alpha=27-3+1=25$

$v_b=v_3=v_1+2r=12$ ، $v_c=v_{27}=v_1+26r=132$

ومنه: $S=\alpha\frac{v_b+v_c}{2}=25\frac{12+132}{2}$ أي: $\boxed{S=1800}$

حل التمرين(2)

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_1 وأساسها r بحيث:

$v_1=16$ و $v_6=-512$

1) حساب الأساس r.

بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_1 وأساسها r فإن:

$v_n=v_1r^{n-1}$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n. ومنه: $v_6=16r^5$ أو

$16r^5=-512$ أي: $r^5=-32=(-2)^5$ و $\boxed{r=-2}$

2) حساب $S=v_2+v_3+\ldots\ldots+v_{10}$

مجموع الحدود المتتابعة من متتالية هندسية هو $\boxed{S=v_b\frac{r^\alpha-1}{r-1}}$ ...(2)

حيث: عدد حدود المجموع $=\alpha$ ، الحد الأول من المجموع $=v_b$ و r الأساس

$\alpha=10-2+1=9;\ v_b=v_2=v_1r=16\times(-2)=-32$

ومنه $\boxed{S=-5472}$

حل التمرين(3)

حساب المجاميع التالية

1) $S=1+2+\ldots\ldots+n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية (v_n) أساسها $r=1$ وحدها الأول $v_1=1$ وحدها العام هو $v_n=v_1+(n-1)r$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n أي: $v_n=n$

إذن: $S=1+2+\ldots\ldots+n=v_1+v_2+\ldots.+v_n$

أي أن: $\boxed{S=n\frac{1+n}{2}}$ حسب النتيجة (1) من التمرين (1)

لأن: $\alpha=$ عدد حدود المجموع $=n-1+1=n$

$v_b=v_1=1$ ، $v_c=v_n=n$

2) $S=1+3+5\ldots+(2n+1)$

بنفس الطريقة السابقة نجد أن S هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية (v_n) أساسها $r=2$ وحدها الأول $v_0=1$ وحدها العام هو $v_n=v_0+nr$ لكل عدد طبيعي n أي: $v_n=1+2n$ ومنه:

$S=1+3+\ldots\ldots+(2n+1)=v_0+v_1+\ldots.+v_n$

أي أن: $\boxed{S=(n+1)^2}$ حسب النتيجة (1) من التمرين (1) لأن:

$\alpha=$ عدد حدود المجموع $=n-0+1=n+1$

$v_b=v_0=1$ ، $v_c=v_n=2n+1$

3) $S=2^3+2^4+\ldots+2^{12}$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية (v_n) أساسها $r=2$ وحدها الأول $v_1=2^3=8$ وحدها العام هو $v_n=v_1r^{n-1}$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n أي: $v_n=8(2)^{n-1}=2^3(2)^{n-1}=2^{n+2}$

نجد رتبة الحد الذي قيمته 2^{12} أولا: $2^{12}=2^{n+2}$ أي: $n=10$

ومنه: $S=2^3+2^4+\ldots+2^{12}=v_1+v_2+\ldots+v_{10}$

أي أن: $\boxed{S=8\frac{2^{10}-1}{2-1}=8184}$ حسب النتيجة (2) من التمرين (2)

لأن: $\alpha=$ عدد حدود المجموع $=10-1+1=10$ ، $v_b=v_1=8$

ملاحظة هامة(1): عدد الحدود α لمجموع حدود متعاقبة من متتالية هو α = رتبة الحد الأخير من المجموع − رتبة الحد الأول من المجموع +1

حل التمرين(4)

تعيين عددين حقيقيين x,y علما أن:

$x,15,y$ حدود متعاقبة من متتالية هندسية.....(1)

$x,25,y$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية.....(2)

من (1) ينتج: $15^2=xy$ (خاصية 3 حدود متعاقبة من متتالية هندسية)

من (2) ينتج: $50=x+y$ (خاصية 3 حدود متعاقبة من متتالية حسابية)

ونحصل على الجملة (S):

$$\begin{cases} 15^2=xy \\ 50=x+y \end{cases}$$

من المعادلة $50=x+y$ نجد: $x=50-y$ نعوضها في المعادلة

$15^2 = xy$ فنحصل على المعادلة: $y^2 - 50y + 225 = 0$ معادلة لها

حلين: $y = 5; y = 45$ وبما أن $x = 50 - y$ فإننا نحصل على

$x = 45$ من أجل $y = 5$ و $x = 5$ من أجل $y = 45$

نتيجة: $(x; y) = (5;45)$ أو $(x; y) = (45;5)$.

حل التمرين(5)

(v_n) متتالية معرفة بـــ: $v_0 = 4$ و $n \in N \,/\, v_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{-2+v_n}$

1) حساب v_1, v_2.

بتعويض $n = 0$ في العبارة $v_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{-2+v_n}$ نجد:

$v_1 = 4 - \dfrac{1}{-2+v_0}$ ومنه: $\boxed{v_1 = \dfrac{7}{2}}$ بتعويض $n = 1$ في العبارة

$v_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{-2+v_n}$ نجد: $v_2 = 4 - \dfrac{1}{-2+v_1}$ ومنه: $\boxed{v_2 = \dfrac{10}{3}}$

2) إثبات: $v_n \succ 3$ لكل عدد طبيعي n والاستنتاج

نبرهن بالتراجع

أ) نبرهن صحة $P(0)$ أي صحة الخاصية: $v_n \succ 3$ من أجل $n = 0$

من أجل $n = 0$ ، $v_0 = 4 \succ 3$ ومنه صحة $P(0)$.

ب) نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

نفرض صحة $P(n)$ أي $v_n \succ 3$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي: $v_{n+1} \succ 3$ بما

أن $v_n \succ 3$ فإن: $-2 + v_n \succ 1$ (بإضافة -2 إلى طرفي المتباينة $v_n \succ 3$)

ومنه: $\dfrac{1}{-2+v_n} \prec 1$ (نتيجة هامة: إذا كان $a \succ b \succ 0$ فإن $\dfrac{1}{a} \prec \dfrac{1}{b}$)

وبالتالي فإن: $-\dfrac{1}{-2+v_n} \prec -1$ (الضرب بعدد سالب يغير اتجاه المتباينة)

وبإضافة 4 + إلى الطرفين نجد: $4 - \dfrac{1}{-2+v_n} \prec -1 + 4$ أي: $v_{n+1} \succ 3$

ومنه صحة $P(n+1)$.

من أ) و ب) نستنتج أن: $v_n \succ 3$ لكل عدد طبيعي n.

الاستنتاج: بما أن: $v_n \succ 3$ لكل عدد طبيعي n فإن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 3.

3) $u_n = \dfrac{3}{3-v_n}$

أ- إثبات (u_n) متتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية أساسها r إذا تحقق: $n \in N \,/\, u_{n+1} - u_n = r$

$u_{n+1} = \dfrac{3}{3-v_{n+1}} = \dfrac{3}{3-\left(4 - \dfrac{1}{-2+v_n}\right)}$ بتبسيط عبارة u_{n+1} نجد:

$u_{n+1} = \dfrac{6-3v_n}{-3+v_n}$ ومنه: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{6-3v_n}{-3+v_n} - \dfrac{3}{3-v_n}$ أو

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{6-3v_n+3}{-3+v_n} = \dfrac{9-3v_n}{-3+v_n} = \dfrac{-3(-3+v_n)}{-3+v_n}$

وبما أن $v_n \succ 3$ فإن: $-3 + v_n \neq 0$ وبالتالي نحصل على

$u_{n+1} - u_n = -3$ لكل عدد طبيعي n ومنه (u_n) متتالية حسابية

أساسها $r = -3$ وحدها الأول $u_0 = \dfrac{3}{3-v_0} = -3$ لأن:

$u_n = \dfrac{3}{3-v_n}$ و $v_0 = 4$.

ب- استنتاج u_n بدلالة n.

استنتاج u_n بدلالة n يعني إيجاد عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$ وحدها الأول $u_0 = -3$ إذن:

$u_n = u_0 + nr$ أي: $\boxed{u_n = -3 - 3n}$ لكل عدد طبيعي n

حل التمرين(6)

(v_n) متتالية معرفة بـــ: $v_0 = 20, v_1 = 6$

$n \in N^* / v_{n+1} = -\dfrac{1}{20}v_n + \dfrac{1}{20}v_{n-1}$.....(1)

1) حساب v_2, v_3. هل (v_n) متتالية هندسية أو حسابية ؟ تبرير الإجابة.

نعوض $n = 1$ في العلاقة (1) نجد: $v_2 = -\dfrac{1}{20}v_1 + \dfrac{1}{20}v_0 = 0.7$

نعوض $n = 2$ في العلاقة (1) نجد: $v_3 = -\dfrac{1}{20}v_2 + \dfrac{1}{20}v_1 = 0.265$

(v_n) ليست متتالية حسابية لأن: $2v_1 = 12 \neq v_0 + v_2 = 20.7$

(v_n) ليست متتالية هندسية لأن: $v_1^2 = 36 \neq v_0 v_2 = 14$.

2) $u_n = v_{n+1} + \dfrac{1}{4}v_n$ ، $w_n = v_{n+1} - \dfrac{1}{5}v_n$ لكل عدد طبيعي n.

أ- بيان أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$

(u_n) متتالية هندسية أساسها r إذا تحقق: $n \in N \,/\, u_{n+1} = u_n r$

$u_n = v_{n+1} + \dfrac{1}{4}v_n$ إذن: $u_{n+1} = v_{n+2} + \dfrac{1}{4}v_{n+1}$...(2)

ولدينا: $v_{n+1} = -\dfrac{1}{20}v_n + \dfrac{1}{20}v_{n-1}$ إذن:

$v_{n+2} = -\dfrac{1}{20}v_{n+1} + \dfrac{1}{20}v_n$ نعوض بهذه العبارة في العبارة(2) نجد:

$u_{n+1} = -\dfrac{1}{20}v_{n+1} + \dfrac{1}{20}v_n + \dfrac{1}{4}v_{n+1} = \dfrac{4}{20}v_{n+1} + \dfrac{1}{20}v_n$

ومنه: $u_{n+1} = \dfrac{4}{20}\left(v_{n+1} + \dfrac{1}{4}v_n\right) = \dfrac{1}{5}u_n$ و (u_n) متتالية هندسية

أساسها $\boxed{r = \dfrac{1}{5}}$. وحدها الأول $u_0 = v_1 + \dfrac{1}{4}v_0 = 11$

ب- بيان أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

بنفس الطريقة السابقة في أ نجد (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = -\dfrac{1}{4}}$.

وحدها الأول $w_0 = v_1 - \dfrac{1}{5}v_0 = 2$

ج-كتابة u_n , w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

(u_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{1}{5}$ ،حدها الأول $u_0 = 11$ إذن عبارة الحد العام لها هي: $u_n = u_0 r^n = 11\left(\frac{1}{5}\right)^n$ لكل عدد طبيعي n

بنفس الطريقة نجد: $w_n = w_0 q^n = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ لكل عدد طبيعي n

$u_n = v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n .....(1)$ ، $w_n = v_{n+1} - \frac{1}{5}v_n ....(2)$

بطرح العلاقة (2) من (1) نجد: $u_n - w_n = \frac{9}{20}v_n$

و $v_n = \frac{20}{9}(u_n - w_n)$ أي: $v_n = \frac{20}{9}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$

لكل عدد طبيعي n .

د- التعبير عن S بدلالة v_0, v_1, v_n ثم استنتاج S بدلالة n .

$$n \in N^* / v_{n+1} = -\frac{1}{20}v_n + \frac{1}{20}v_{n-1}$$

$$v_0 = v_0$$

$$v_1 = v_1$$

$$v_2 = -\frac{1}{20}v_1 + \frac{1}{20}v_0$$

$$v_3 = -\frac{1}{20}v_2 + \frac{1}{20}v_1$$

$$v_4 = -\frac{1}{20}v_3 + \frac{1}{20}v_2$$

.....

.....

.....

$$v_n = -\frac{1}{20}v_{n-1} + \frac{1}{20}v_{n-2}$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{20}v_n + \frac{1}{20}v_{n-1}$$

نجمع المتساويات السابقة طرفا لطرف نجد:

$$S = v_0 + v_1 + ... + v_{n+1} = v_0 + v_1 + \frac{1}{20}v_0 - \frac{1}{20}v_n$$

أي: $\boxed{S = \frac{21}{20}v_0 + v_1 - \frac{1}{20}v_n}$

لدينا: $v_0 = 20, v_1 = 6$ ، $v_n = \frac{20}{9}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$

إذن: $\boxed{S = 27 - \frac{1}{9}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)}$

حل التمرين(7)

(v_n) متتالية معرفة بـــ: $v_0 = 2$ و $n \in N / \ v_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}v_n^2 + 1}$

1) حساب v_1 , v_2 .

$v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}v_0^2 + 1}$ ، $v_2 = \sqrt{\frac{1}{2}v_1^2 + 1}$ أي: $\boxed{v_1 = \sqrt{3}}$ ، $\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}}$

2) نضع: $u_n = v_n^2 - 2$ لكل عدد طبيعي n .

أ. إثبات أن (u_n) متتالية هندسية وتحديد أساسها.

$u_n = v_n^2 - 2$ إذن:

$u_{n+1} = v_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{2}v_n^2 + 1 - 2 = \frac{1}{2}v_n^2 - 1$ ومنه:

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n^2 - 2) = \frac{1}{2}u_n$ و (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{r = \frac{1}{2}}$

وحدها الأول $u_0 = v_0^2 - 2 = 2$ وحدها العام $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب. استنتاج v_n بدلالة n .

$u_n = v_n^2 - 2$ ومنه: $v_n^2 = u_n + 2$ وبما أن (v_n) متتالية حدودها موجبة فإن: $\boxed{v_n = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}}$ لكل عدد طبيعي n .

3) أ.إثبات أن: $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}$ لكل عدد حقيقي x موجب.

نبرهن بالخلف:نفرض أن $\sqrt{1+x} \succ 1 + \frac{x}{2}$ ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض،بتربيع طرفي المتباينة $\sqrt{1+x} \succ 1 + \frac{x}{2}$ نجد: $1 + x \succ 1 + x + \frac{x^2}{4}$

ومنه: $0 \succ \frac{x^2}{4}$ وهذا تناقض لأن: $\frac{x^2}{4} \ge 0$. إذن : $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}$

لكل عدد حقيقي x موجب.

ب.استنتاج أن: $\sqrt{2} \le v_n \le \sqrt{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ لكل عدد طبيعي n .ثم استنتاج $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

$$v_n = \sqrt{u_n + 2} = \sqrt{2(\frac{u_n}{2} + 1)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{u_n}{2}}$$

باستعمال المتباينة $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}$ نجد: $\sqrt{1 + \frac{u_n}{2}} \le 1 + \frac{u_n}{4}$ (وذلك بوضع $x = \frac{u_n}{2}$).

$v_n = \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{2}\left(1 + \frac{u_n}{4}\right)$ ، (u_n) متتالية هندسية حدها العام

$$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وبالتالي فإن: $v_n \le \sqrt{2}\left(1+\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4}\right)$

أي أن: $v_n \le \sqrt{2}\left[1+\frac{\frac{1}{2^n}}{2}\right]$ ومنه: $v_n \le \sqrt{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$..(1).

(u_n) متتالية ذات حدود موجبة أي أن: $u_n \ge 0$ ومنه: $u_n+2 \ge 2$ أي:

$v_n=\sqrt{u_n+2} \ge \sqrt{2}$.....(2).

من (1) و(2) ينتج أن: $\boxed{n\in N \,/\, \sqrt{2} \le v_n \le \sqrt{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \le \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \le \sqrt{2}$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\sqrt{2}}$. وذلك اعتمادا على حساب النهاية بالمقارنة.

حل التمرين(8)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_0 \in]-1,0[$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}$

1.إثبات أن: $-1 \prec u_n \prec 0$ لكل عدد طبيعي n.

نبرهن بالتراجع:نفرض $p(n)$ الخاصية $n\in N \,/\, -1 \prec u_n \prec 0$

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $u_0 \in]-1,0[$ فرضا أي: $-1 \prec u_n \prec 0$.

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $-1 \prec u_n \prec 0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$-1 \prec u_{n+1} \prec 0$

$-1 \prec u_n \prec 0$ إذن: $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \prec 0$ لأن: $\sqrt{2+u_n} \succ 0$ ومنه :

$u_{n+1} \prec 0$....(1) من جهة أخرى : $-1 \prec u_n \prec 0$ وينتج عنها أن:

$1 \prec 2+u_n \prec 2$ أو $1 \prec 2+u_n$ ومنه ينتج: $1 \prec \sqrt{2+u_n}$ ...(2)

أو $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}} \prec 1$ ولأن: $u_n \prec 0$ فإن: $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \succ u_n$.

وينتج منها مباشرة أن: $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \succ -1$ ...(3) لأن: $-1 \prec u_n$

من (1) و(3) ينتج : $-1 \prec u_{n+1} \prec 0$ و $p(n+1)$ صحيحة.

2.إثبات أن (u_n) متزايدة تماما.ثم استنتاج أنها متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}-u_n=\frac{u_n\left(1-\sqrt{2+u_n}\right)}{\sqrt{2+u_n}}$$

ولدينا حسب (2) $1-\sqrt{2+u_n} \prec 0$ و $u_n \prec 0$ حسب السؤال (1)

ومنه: $u_{n+1}-u_n \succ 0$ و (u_n) متزايدة تماما.

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 ($u_n \prec 0$)فهي متقاربة.

3.إثبات أن: $u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$ حيث $n\in N$.

نبرهن بالتراجع: نفرض $p(n)$ الخاصية $n\in N \,/\, u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$.

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $u_1=\frac{u_0}{\sqrt{2+u_0}} \ge \frac{u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

ب)نفرض صحة $p(n)$ أي: $u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي: $u_{n+2} \ge \frac{u_{n+1}}{\sqrt{2+u_0}}$ أو $u_{n+2}-\frac{u_{n+1}}{\sqrt{2+u_0}} \ge 0$

$$u_{n+2}-\frac{u_{n+1}}{\sqrt{2+u_0}}=\frac{u_{n+1}}{\sqrt{2+u_{n+1}}}-\frac{u_{n+1}}{\sqrt{2+u_0}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2+u_0}\right)u_{n+1}-\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)u_{n+1}}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)}$$

ولدينا فرضا $u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$ أي: $\left(\sqrt{2+u_0}\right)u_{n+1} \ge u_n$ ..(1)

وبإضافة $-\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)u_{n+1}$ إلى طرفي المتباينة..(1) نجد:

$$\left(\sqrt{2+u_0}\right)u_{n+1}-\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)u_{n+1} \ge u_n-\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)u_{n+1}$$

ولدينا: $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}$ تعريفا إذن

$$u_n-\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)u_{n+1}=u_n-\left(\sqrt{2+u_{n+1}}\right)\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2+u_n}-\sqrt{2+u_{n+1}}}{\sqrt{2+u_n}}\right)u_n$$

بضرب طرفي العبارة الأخيرة بمرافق البسط نحصل على العبارة

$$\frac{(u_n-u_{n+1})u_n}{\left(\sqrt{2+u_n}+\sqrt{2+u_{n+1}}\right)\sqrt{2+u_n}}$$

(u_n) متزايدة تماما.إذن $u_{n+1}-u_n \succ 0$ أو $u_n-u_{n+1} \prec 0$

$-1 \prec u_n \prec 0$ حسب السؤال (1) إذن : $u_n \prec 0$

والجداء $(u_n-u_{n+1})u_n \succ 0$ أي أن:

$$\frac{(u_n-u_{n+1})u_n}{\left(\sqrt{2+u_n}+\sqrt{2+u_{n+1}}\right)\sqrt{2+u_n}} \succ 0$$

إذن: $u_{n+2}-\frac{u_{n+1}}{\sqrt{2+u_0}} \ge 0$ و $p(n+1)$ صحيحة.

4.إثبات أن: $n\in N\ /\ u_{n+1}\geq \frac{u_0}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^n}$

من السؤال (3) لدينا $m\in N\ /u_{m+1}\geq \frac{u_m}{\sqrt{2+u_0}}$. أو

$-u_{m+1}\leq \frac{-u_m}{\sqrt{2+u_0}}$ وطرفا هذه المتباينة موجبان لأن: $u_m \prec 0$

بتعويض m بـــ: $n+1,n,.....,2,1,0$ نحصل على المتباينات التالية:

$$-u_1\leq \frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$$

$$-u_2\leq \frac{-u_1}{\sqrt{2+u_0}}$$

.

.

.

$$-u_{n+1}\leq \frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$$

بضرب المتباينات السابقة طرفا لطرف نحصل على:

$$(-u_1)(-u_2)....(-u_{n+1})\leq \frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}\times\frac{-u_1}{\sqrt{2+u_0}}\times....\times\frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$$

أو $(-u_1)(-u_2)....(-u_{n+1})\leq \frac{(-u_0)(-u_1).....(-u_n)}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^{n+1}}$

لأن الحد $\sqrt{2+u_0}$ يتكرر $n+1$ مرة

باختصار الحدود المتساوية من الطرفين نحصل على:

$(-u_{n+1})\leq \frac{-u_0}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^{n+1}}$ أو $u_{n+1}\geq \frac{u_0}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^{n+1}}$ وهو المطلوب.

5.استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا: $0\succ u_{n+1}\geq \frac{u_0}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^{n+1}}$

$-1\prec u_0\prec 0$ إذن: $1\prec 2+u_0$ ومنه: $1\prec\sqrt{2+u_0}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2+u_0)^{n+1}=+\infty$ لأن: $1\prec\sqrt{2+u_0}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_0}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^{n+1}}=0$ ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$

حل التمرين(9)

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين على N بـــ

$$b_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2},b_0=b\ ،\ a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},a_0=a$$

$$\alpha_n=b_n-a_n\ ،\ 0\prec a\prec b$$

1)إثبات أن: $0\leq\alpha_{n+1}\leq\frac{1}{2}\alpha_n$ حيث $n\in N$. ثم استنتاج أن

$0\leq\alpha_n\leq\frac{b-a}{2^n}$ حيث $n\in N$

نبرهن بالتراجع: نفرض $p(n)$ الخاصية $n\in N\ ،\ 0\leq\alpha_{n+1}\leq\frac{1}{2}\alpha_n$

أ) $p(0)$ صحيحة لأن:

$$\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_0=b_1-a_1-\frac{1}{2}(b_0-a_0)$$

$$=\frac{1}{2}(b_0+a_0)-\left(\frac{2a_0b_0}{a_0+b_0}\right)-\frac{1}{2}(b_0-a_0)$$

$$=\frac{{a_0}^2-a_0b_0}{a_0+b_0}=\frac{a^2-ab}{a+b}$$

لأن: $a_0=a$ و $b_0=b$ ولدينا $0\prec a\prec b$ أي أن : $a^2\prec ab$

ومنه: $a^2-ab\prec 0$ إذن: $\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_0\prec 0$ أي: $\alpha_1\leq\frac{1}{2}\alpha_0$

$$\alpha_1=b_1-a_1=\frac{1}{2}(b_0+a_0)-\left(\frac{2a_0b_0}{a_0+b_0}\right)$$

$$=\frac{(a_0-b_0)^2}{2(a_0+b_0)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geq 0$$

لأن: $a_0=a$ و $b_0=b$ و $0\prec a\prec b$.

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $0\leq\alpha_{n+1}\leq\frac{1}{2}\alpha_n$ ونبرهن صحة

$p(n+1)$ أي: $0\leq\alpha_{n+2}\leq\frac{1}{2}\alpha_{n+1}$

$\alpha_{n+2}-\frac{1}{2}\alpha_{n+1}=\frac{{a^2}_{n+1}-a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}$ (تأكد من ذلك بسهولة)

$0\prec a_{n+1}+b_{n+1}$ (مجموع موجبين)وإشارة $\alpha_{n+2}-\frac{1}{2}\alpha_{n+1}$ من إشارة

${a^2}_{n+1}-a_{n+1}b_{n+1}$

${a^2}_{n+1}-a_{n+1}b_{n+1}=a^2{}_{n+1}-a_nb_n$ لأن: $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$

تأكد من ذلك. بحساب عبارة ${a^2}_{n+1}-a_nb_n$ نجد:

$${a^2}_{n+1}-a_nb_n=\frac{({a^2}_n-a_nb_n)b_n(b_n-a_n)}{(a_n+b_n)^2}$$

$\alpha_{n+1}-\frac{1}{2}\alpha_n=\frac{{a^2}_n-a_nb_n}{a_n+b_n}\prec 0$ ومنه: ${a^2}_n-a_nb_n\prec 0$ لأن

$\alpha_{n+1}-\frac{1}{2}\alpha_n\prec 0$ و $\alpha_n=b_n-a_n\succ 0$ حسب فرض التراجع.

ومنه: $\alpha_{n+2}-\frac{1}{2}\alpha_{n+1}\prec 0$ و $p(n+1)$ صحيحة .

استنتاج أن $n\in N\ /0\leq\alpha_n\leq\frac{b-a}{2^n}$

نبرهن بالتراجع: نفرض $p(n)$ الخاصية $n\in N/\ 0\leq\alpha_n\leq\frac{b-a}{2^n}$

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $0\prec a\prec b$ ، $\alpha_0=b_0-a_0=b-a\succ 0$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $0\leq\alpha_n\leq\frac{b-a}{2^n}$ ونبرهن صحة

$p(n+1)$ أي: $0\leq\alpha_{n+1}\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}$

لدينا حسب ما سبق $0 \le \alpha_{n+1} \le \frac{1}{2}\alpha_n$ ،إذن:

$0 \le \alpha_{n+1} \le \frac{1}{2}\alpha_n \le \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ لأن: $\alpha_n \le \frac{b-a}{2^n}$ حسب فرض التراجع. ومنه صحة $p(n+1)$.

2)إثبات أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتين.

أ)دراسة اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} - a_n = \frac{a_n(b_n-a_n)}{a_n+b_n} = \frac{a_n\alpha_n}{a_n+b_n} \ge 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n+a_n}{2} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2} = -\frac{\alpha_n}{2} \le 0$$

ومنه: (b_n) متناقصة و (a_n) متزايدة.

ب)حساب $\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)$

نعلم أن: $\alpha_n = b_n - a_n$ و $0 \le \alpha_n \le \frac{b-a}{2^n}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0$ (لأن : $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$) فإن: $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n) = 0$

من أ) و ب) ينتج أن (a_n) و (b_n) متجاورتين.

3)إثبات أن: $a_nb_n = ab$ لكل عدد طبيعي n . ثم تحديد نهايتي المتتاليتين (a_n) و (b_n) .

نبرهن بالتراجع: نفرض $p(n)$ الخاصية $a_nb_n = ab$ لكل عدد طبيعي n

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $a_0b_0 = ab$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي $a_nb_n = ab$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $a_{n+1}b_{n+1} = ab$

$a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$ (تأكد من ذلك) وبما أن $a_nb_n = ab$ حسب فرض التراجع فإن: $a_{n+1}b_{n+1} = ab$ ومنه صحة $p(n+1)$.

(a_n) و (b_n) متجاورتين إذن: $\lim_{n\to+\infty}b_n = \lim_{n\to+\infty}a_n = l$

$a_nb_n = ab$ إذن: $l^2 = ab$ ومنه: $l = \sqrt{ab}$ لأن $l \succ 0$.

حل التمرين(10)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0 = 1$ ، $n \in N \ / \ v_{n+1} = v_n(v_n+1)$

1.إثبات أن: (v_n) متزايدة واستنتاج أن: $n \in N / \ v_n \ge 1$

$n \in N / v_{n+1} - v_n = v_n(v_n+1) - v_n = v_n^2 \ge 0$ و (v_n) متزايدة .

وبما أن (v_n) متزايدة فإن: $v_n \ge v_0$ لكل $n \in N$ ومنه: $v_n \ge 1$ لكل $n \in N$ لأن: $v_0 = 1$.

2.إثبات أن: $v^2{}_n \ge v_n$ لكل عدد طبيعي n .

$v^2{}_n - v_n = v_n(v_n-1) \ge 0$ لأن: $v_n \ge 1$ حسب السؤال (1)

3. إثبات أن: $v_{n+1} \ge 2v_n$ لكل عدد طبيعي n .

$v_{n+1} - 2v_n = v_n^2 - v_n \ge 0$ حسب السؤال (3)

4.استنتاج أن: $v_n \ge 2^n$ لكل عدد طبيعي n .

ثم تحديد نهاية (v_n) .

نبرهن بالتراجع نفرض $p(n)$ الخاصية $v_n \ge 2^n$ لكل عدد طبيعي n .

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $v_0 = 1 \ge 2^0$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $v_n \ge 2^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $v_{n+1} \ge 2^{n+1}$.

$v_{n+1} \ge 2v_n$ حسب (3).

$v_n \ge 2^n$ إذن: $2 \times v_n \ge 2 \times 2^n$

ومنه: $2v_n \ge 2^{n+1}$ أي: $v_{n+1} \ge 2^{n+1}$.ومنه صحة $p(n+1)$.

$v_n \ge 2^n$ و $\lim_{n\to+\infty}2^n = +\infty$ ($|2| \succ 1$) ومنه: $\lim_{n\to+\infty}v_n = +\infty$

حل التمرين(11)

$f(x) = \frac{5x-8}{x-1}$ و (c_f) منحناها البياني.

1)دراسة تغيرات f

أ) مجموعة التعريف D_f

$D_f = \{x \in R : x-1 \ne 0\} =]-\infty,1] \cup [1,+\infty[$

ب)النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5, \lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = +\infty, \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

جـــ) المشتق وإشارته

f دالة ناطقة قابلة للاشتقاق على D_f بحيث: $f`(x) = \frac{3}{(x-1)^2} \succ 0$

و f متزايدة تماما على D_f .

د) جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↗ 5	‖	5 ↗ $-\infty$

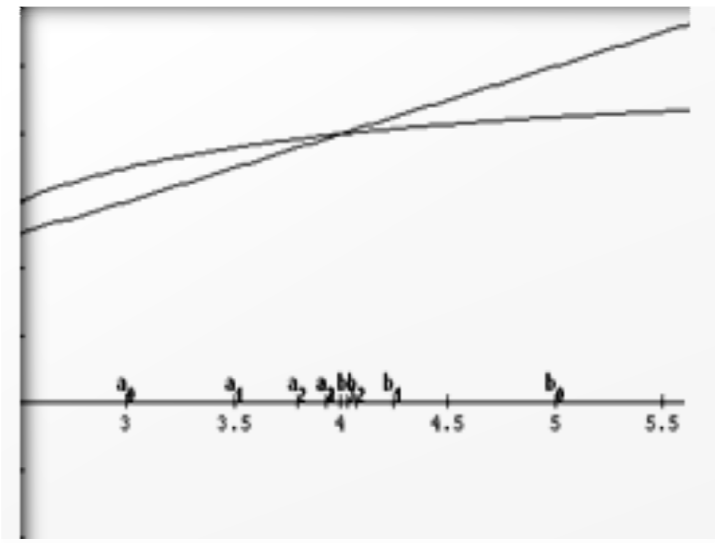
2)بيان أن: $3 \le f(x) \le 5$ لكل $x \in [3;5]$.

f متزايدة تماما على D_f ، إذن: f متزايدة تماما على $[3;5]$. ومنه:

إذا كان: $3 \le x \le 5$ فإن: $f(5) \ge f(x) \ge f(3)$ ،

$f(5) = 4.25, f(3) = 3.5$ إذن: $3 \le f(x) \le 5$.

3) إنشاء (c_f) على المجال $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$



4) نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين على N بـ

$a_{n+1} = f(a_n), a_0 = 3$ $\quad b_{n+1} = f(b_n), b_0 = 5$

أ) تمثيل الحدود الأربعة الأولى على محور الفواصل

$a_{n+1} = f(a_n), a_0 = 3$ ومنه: $a_1 = f(a_0) = 3.5$

$a_2 = f(a_1) = 3.8$ ، $a_3 = f(a_2) = 3.93$

$b_{n+1} = f(b_n), b_0 = 5$ ، ومنه: $b_1 = f(b_0) = 4.25$ ،

$b_2 = f(b_1) = 4.08$ ، $b_3 = f(b_2) = 4.03$

ب) تقديم تخمين بخصوص اتجاه التغير والتقارب لكل من (a_n) و (b_n).

(a_n) متتالية متزايدة و (b_n) متناقصة والحدود تتقارب نحو العدد 4.

جـ) إثبات صحة الآتي باستعمال البرهان بالتراجع

1) $3 \le a_n \le 5$ لكل عدد طبيعي n.

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $3 \le a_0 \le 5$ ، $a_0 = 3$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي $3 \le a_n \le 5$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$3 \le a_{n+1} \le 5$.

$3 \le a_n \le 5$ و f متزايدة تماما على D_f إذن: $f(3) \le f(a_n) \le f(5)$

ومنه: $3 \le a_{n+1} \le 5$ لأن: $f(3) = 3.5, f(5) = 4.25$

2) $a_n \le a_{n+1}$ لكل عدد طبيعي n

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $a_1 = 3.5$ ، $a_0 = 3$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي $a_n \le a_{n+1}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$a_{n+1} \le a_{n+2}$.

بما أن f متزايدة و $a_n \le a_{n+1}$ فإن: $f(a_n) \le f(a_{n+1})$ أي:

$a_{n+1} \le a_{n+2}$ لأن: $f(a_n) = a_{n+1}, f(a_{n+1}) = a_{n+2}$

3) $3 \le b_n \le 5$ لكل عدد طبيعي n.

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $b_0 = 5$ تحقق: $3 \le b_0 \le 5$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي $3 \le b_n \le 5$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$3 \le b_{n+1} \le 5$.

بما أن f متزايدة و $3 \le b_n \le 5$ فإن: $f(3) \le f(b_n) \le f(5)$ أي:

$3 \le b_{n+1} \le 5$ لأن: $f(5) = 4.25, f(3) = 3.5$ و $f(b_n) = b_{n+1}$

4) $b_{n+1} \le a_n$ لكل عدد طبيعي n.

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $b_1 = 4.25, a_0 = 5$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $b_{n+1} \le a_n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$b_{n+2} \le a_{n+1}$.

$b_{n+2} = f(b_{n+1})$ و $a_{n+1} = f(a_n)$ و f متزايدة إذن:

$f(b_{n+1}) \le f(a_n)$ لأن: $b_{n+1} \le a_n$ حسب فرض التراجع ومنه:

$b_{n+2} \le a_{n+1}$.

د) برهان أن:

$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3(b_n - a_n)}{(b_n - 1)(a_n - 1)}$ لكل عدد طبيعي n.

$b_{n+1} - a_{n+1} = f(b_n) - f(a_n)$

$f(x) = \frac{5x-8}{x-1}$ إذن: $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{5b_n - 8}{b_n - 1} - \frac{5a_n - 8}{a_n - 1}$ بتبسيط

العمليات نحصل على المطلوب.

هـ) استنتج أن: $b_{n+1} - a_{n+1} \le \frac{3}{4}(b_n - a_n)$ و $b_n - a_n \ge 0$

لكل عدد طبيعي n.

أولا نبرهن بالتراجع أن: $b_n - a_n \ge 0$ لكل عدد طبيعي n.

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $b_0 = 5, a_0 = 3$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $b_n - a_n \ge 0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$b_{n+1} - a_{n+1} \ge 0$.

$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3(b_n - a_n)}{(b_n - 1)(a_n - 1)}$ حسب د) و $b_n - a_n \ge 0$ حسب

فرض التراجع و $3 \le a_n$ و $3 \le b_n$ لكل عدد طبيعي n. حسب السؤال 4

ومنه: $b_n - 1 \succ 0$ ، $a_n - 1 \succ 0$ إذن: $b_{n+1} - a_{n+1} \ge 0$.

ثانيا نبرهن أن: $b_{n+1} - a_{n+1} \le \frac{3}{4}(b_n - a_n)$

لدينا: $3 \le a_n$ و $3 \le b_n$ حسب السؤال 4 إذن: $a_n - 1 \ge 2$ ومنه:

$\frac{1}{a_n - 1} \le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{b_n - 1} \le \frac{1}{2}$. بضرب طرفي المتباينتين طرفا لطرف نجد

$\frac{1}{(b_n - 1)}\frac{1}{(a_n - 1)} \le \frac{1}{4}$ ونضرب طرفي هذه المتباينة بـ: $3(b_n - a_n)$

نحصل على المتباينة المطلوبة.

و)استنتاج أن: $n\in N/b_n-a_n\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

نبرهن بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $b_0-a_0=2$ و $2\left(\frac{3}{4}\right)^0=2$

ب)نفرض صحة $p(n)$ أي: $b_n-a_n\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي: $b_{n+1}-a_{n+1}\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $b_{n+1}-a_{n+1}\le\frac{3}{4}(b_n-a_n)$ حسب السؤال السابق و

$b_n-a_n\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ حسب فرض التراجع إذن:

$$b_{n+1}-a_{n+1}\le\frac{3}{4}(b_n-a_n)\le\frac{3}{4}2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$\frac{3}{4}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ إذن: $b_{n+1}-a_{n+1}\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

ى)إثبات أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي l ثم تعيين القيمة الدقيقة للعدد l.

$0\le b_n-a_n\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ (لأن: $\left|\frac{3}{4}\right|\prec 1$)

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$

و المتتاليتين (a_n) و (b_n) متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي l

$a_{n+1}=f(a_n)$ إذن: $l=f(l)$ أو $l=\frac{5l-8}{l-1}$ معادلة تقبل حلين

هما : $l=2$ أو $l=4$ وبما أن $3\le a_n\le 5$ فإن: $l=4$

حل التمرين(12)

برهان أن المتتالية الثابتة هي متتالية حسابية وهندسية في آن واحد.

لتكن (v_n) متتالية ثابتة أي: $n\in N/v_{n+1}-v_n=0$ ....(1)

من (1) ينتج أن: $n\in N/v_{n+1}-v_n=r$ حيث $r=0$ و (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=0$.

من (1) ينتج أن: $n\in N/v_{n+1}=v_n\times r$ حيث $r=1$ و (v_n) متتالية هندسية أساسها $r=1$.

حل التمرين(13)

(v_n) متتالية معرفة بـــ: $v_0=1$ ، $n\in N/\ v_{n+1}=v_n+2n+3$

1)دراسة رتابة (v_n).

$n\in N/v_{n+1}=v_n+2n+3$ إذن:

$n\in N/v_{n+1}-v_n=2n+3\succ 0$ ومنه (v_n) متزايدة تماما.

2)برهان أن: $v_n\succ n^2$ لكل عدد طبيعي n.

نبرهن بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $v_0=1\succ 0^2$.

ب)نفرض صحة $p(n)$ أي: $v_n\succ n^2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$v_{n+1}\succ(n+1)^2$

$$v_{n+1}=v_n+2n+3\succ n^2+2n+3=(n^2+2n+1)+2$$
$$=(n+1)^2+2\succ(n+1)^2$$

3) تحديد نهاية (v_n).

$v_n\succ n^2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

4)تخمين عبارة v_n بدلالة n ثم برهان صحة التخمين.

$v_0=1$ ، $v_{n+1}=v_n+2n+3$

$$v_1=v_0+2(0)+3=1+3=4=(1+1)^2$$
$$v_2=v_1+2(1)+3=9=(1+2)^2$$

ومنه: $v_n=(n+1)^2$

نبرهن صحة التخمين بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $v_0=(0+1)^2=1$

ب)نفرض صحة $p(n)$ أي: $v_n=(n+1)^2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي: $v_{n+1}=(n+2)^2$

$$v_{n+1}=v_n+2n+3=(n+1)^2+2n+3=n^2+2n+1+2n+3$$
$$=n^2+4n+4=(n+2)^2$$

حل التمرين(14)

(a_n) و (b_n) متتاليتين معرفتين على N بـــ:

$a_0=1$ ، $a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+2a_n)$ ، $b_0=7$ ، $b_{n+1}=\frac{1}{3}(2b_n+a_n)$

(D) مستقيم مزود بمعلم $(O;\vec{i})$. نعتبر النقطتين $A_n;B_n$ ذاتا الفاصلتين $a_n;b_n$ على الترتيب.

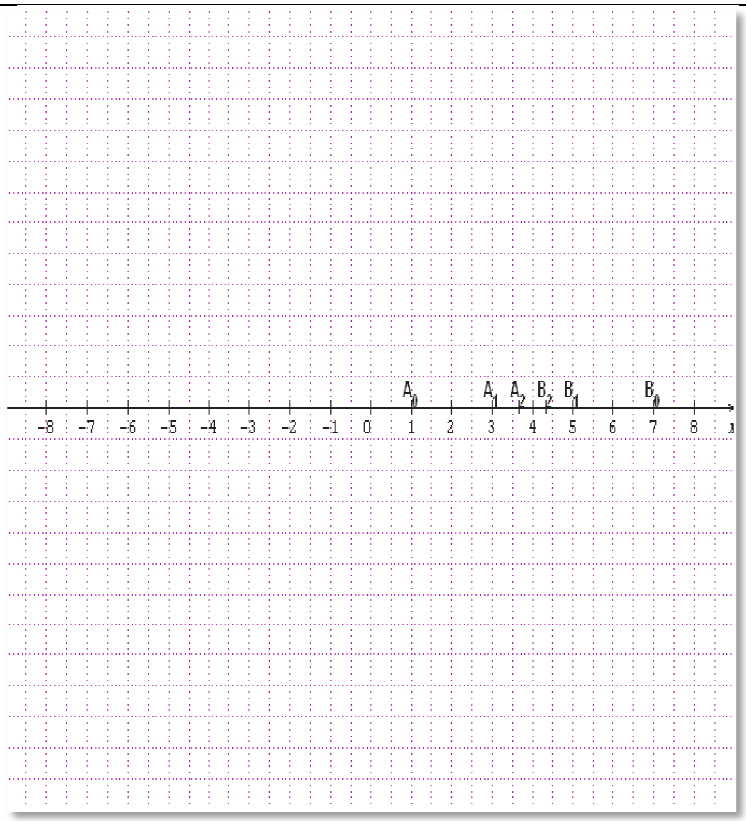
1.تمثيل النقط $A_0;B_0;A_1;B_1;A_2;B_2$

$A_0(1);B_0(7);A_1(3);B_1(5);A_2\left(\frac{11}{3}\right);B_2\left(\frac{13}{3}\right)$ لأن:

$a_0=1$ ، $a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+2a_n)$ ، $b_0=7$ ، $b_{n+1}=\frac{1}{3}(2b_n+a_n)$

ومنه: $a_1=\frac{1}{3}(b_0+2a_0)=3$ ، $b_1=\frac{1}{3}(2b_0+a_0)=5$

$a_2=\frac{1}{3}(b_1+2a_1)=\frac{11}{3}$ ، $b_2=\frac{1}{3}(2b_1+a_1)=\frac{13}{3}$



2. (α_n) متتالية معرفة بـــ: $\alpha_n = b_n - a_n$ حيث $n \in N$.

إثبات (α_n) متتالية هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول.

$\alpha_n = b_n - a_n$ إذن:

$$\alpha_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(2b_n + a_n) - \frac{1}{3}(b_n + 2a_n)$$
$$= \frac{1}{3}(b_n - a_n) = \frac{1}{3}\alpha_n$$

ومنه: (α_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $\alpha_0 = b_0 - a_0 = 6$

3. المقارنة بين b_n و a_n ودراسة اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n) وتفسير النتائج هندسيا.

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}(2b_n + a_n), b_0 = 7 \text{ ، } a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + 2a_n), a_0 = 1$$

$\alpha_n = b_n - a_n$ و $\alpha_n = \alpha_0 r^n$ أي: $\alpha_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه: $\alpha_n \succ 0$

إذن: $b_n - a_n \succ 0$ أي : $b_n \succ a_n$.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(2b_n + a_n) - b_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n) \prec 0$$

و (b_n) متناقصة تماما.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(b_n + 2a_n) - a_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n) \succ 0$$

و (a_n) متزايدة تماما.

التفسير الهندسي: متتالية النقط A_n تتحرك نحو اليمين ومتتالية النقط B_n تتحرك نحو اليسار. والنقط A_n تبقى دوما يسار النقط B_n.

4. برهن أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتين.

(a_n) متزايدة تماما. و (b_n) متناقصة تماما.

$$\lim_{n\to+\infty} = (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} 6\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$ لأن: $\left|\frac{1}{3}\right| \prec 1$

والمتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتين.

5. (β_n) متتالية معرفة بـــ: $\beta_n = b_n + a_n$ لكل عدد طبيعي n.

برهان أن: (β_n) متتالية ثابتة. واستنتج أن للقطع $[A_nB_n]$ نفس المنتصف I

$\beta_n = b_n + a_n$ إذن :

$$\beta_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} = \frac{1}{3}(2b_n + a_n) + \frac{1}{3}(b_n + 2a_n) = b_n + a_n$$
$$= \beta_n$$

و (β_n) متتالية ثابتة.

منتصف القطعة $[A_nB_n]$ هو النقطة I ذات الفاصلة

$\frac{b_n + a_n}{2} = \frac{\beta_n}{2} = \frac{\beta_0}{2} = 4$ لأن: (β_n) متتالية ثابتة و

$\beta_0 = 1 + 7 = 8$

6. تبرير تقارب المتتاليتين (a_n) و (b_n) ثم حساب نهايتهما. تفسير النتيجة

(a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة. ولدينا $b_n \succ a_n$ حسب السؤال 3

إذن: $1 = a_0 \le a_n \prec b_n \le b_0 = 7$

ومنه: (a_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 7 فهي متقاربة و (b_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة.

المتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتين وتتقاربا نحو نفس النهاية l

بما أن $\beta_n = b_n + a_n$ و (β_n) متتالية ثابتة فإن: $\beta_n = b_n + a_n = \beta_0$

أي: $b_n + a_n = 8$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty}(b_n + a_n) = l + l = 8$

أي : $l = 4$.

تفسير النتيجة هندسيا هو: متتاليات النقط (A_n) ، (B_n) تتقارب من النقطة I ذات ا لفاصلة 4. إحداهما من اليمين والأخرى من اليسار.

حل التمرين(15)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_0 = 3$ و $v_{n+1} = 2 + \frac{1}{v_n} - \frac{2}{v^2{}_n}$ لكل عدد طبيعي n.

1) بيان أن (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

نبرهن بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $v_0 = 3 \succ 2$.

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $v_n \succ 2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$v_{n+1} \succ 2$

$v_{n+1} - 2 = \frac{1}{v_n} - \frac{2}{v^2{}_n} = \frac{v_n - 2}{v^2{}_n} \succ 0$ لأن: $v_n \succ 2$.

2) التحقق من أن: $-x^3+2x^2+x-2=(2-x)(x^2-1)$

بنشر $(2-x)(x^2-1)$ نجد المطلوب.

3) دراسة رتابة (v_n). والاستنتاج

$$v_{n+1}-v_n=2+\frac{1}{v_n}-\frac{2}{v^2{}_n}-v_n=\frac{2v_n{}^2+v_n-2-v_n{}^3}{v_n{}^2}$$

$$=\frac{-v_n{}^3+2v_n{}^2+v_n-2}{v_n{}^2}=\frac{(2-v_n)(v_n{}^2-1)}{v_n{}^2}\prec 0$$

لأن: $v_n \succ 2$ ينتج عنها $2-v_n \prec 0$ و $v_n{}^2-1\succ 0$ (x^2-1 كثير حدود ينعدم عند -1 و 1 وموجب من أجل $x\succ 1$)

4) بيان أن: $n\in N/\ v_{n+1}-2\le\frac{1}{4}(v_n-2)$.

$$v_{n+1}-2=\frac{1}{v_n}-\frac{2}{v^2{}_n}=\frac{v_n-2}{v^2{}_n}\succ 0$$

$v_n\succ 2$ إذن: $v_n{}^2\succ 4$ ومنه: $\frac{1}{v_n{}^2}\prec\frac{1}{4}$ بضرب طرفي هذه المتباينة بالعدد الموجب v_n-2 نحصل على $\frac{v_n-2}{v_n{}^2}\prec\frac{v_n-2}{4}$ ومنه:

$v_{n+1}-2\le\frac{1}{4}(v_n-2)$.

5) استنتاج أن: $n\in N/\ v_n-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

نبرهن بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $v_0-2=3-2=1\le\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$.

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $v_n-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي: $v_{n+1}-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $n\in N/v_{n+1}-2\le\frac{1}{4}(v_n-2)$. و $v_n-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$v_{n+1}-2\le\frac{1}{4}(v_n-2)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه: $v_{n+1}-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$0\le v_n-2\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ (لأن: $\left|\frac{1}{4}\right|\prec 1$)

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-2)=0$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2$

حل التمرين(16)

f دالة معرفة بجدول تغيراتها التالي:

x	1	5
$f(x)$	2 ↗	4

نعتبر المتتالية (a_n) المعرفتين على N بـ

$a_{n+1}=f(a_n), a_0=1$

وضع إشارة الجواب الصحيح مكانها مع التبرير.

أ) $1\le a_n\le 5$ لكل عدد طبيعي n. صحيح ونبرهن بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $a_0=1$ و $1\le 1\le 5$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $1\le a_n\le 5$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $1\le a_{n+1}\le 5$، الدالة f متزايدة على $[1;5]$ إذن: $f(1)\le f(a_n)\le f(5)$ ومنه: $2\le a_{n+1}\le 4$ إذن: $1\le a_{n+1}\le 5$

ب) $a_n\le a_{n+1}$ لكل عدد طبيعي n. صحيح ونبرهن بالتراجع

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $a_1=f(a_0)=2, a_0=1$ أي: $a_0\le a_1$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $a_n\le a_{n+1}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $a_{n+1}\le a_{n+2}$، f متزايدة على $[1;5]$ إذن: $f(a_n)\le f(a_{n+1})$

ومنه: $a_{n+1}\le a_{n+2}$

جـ) (a_n) متزايدة من أجل $a_0=5$. خاطئة لأن:

$a_1=f(a_0)=4\le a_0$ ومنه المتتالية (a_n) ليست متزايدة

د) إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n

$\left|a_n-\frac{5}{2}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ خاطئة لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{5}{2}$

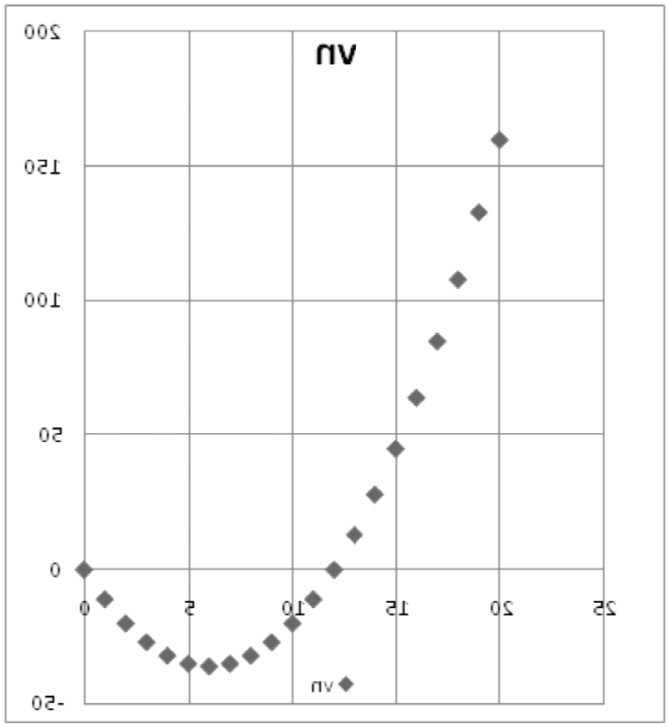
حل التمرين (17)

(v_n) متتالية معرفة بـــ:

$v_{n+1} = v_n + 2n - 11$ $v_0 = 0$ $/ n \in N$.

1) حساب وتمثيل عشرون حدا الأولى باستعمال مجدول إكسل . وملاحظة الخصوصية في التمثيل المحصل عليه .

vn	n
0	0
-11	1
-20	2
-27	3
-32	4
-35	5
-36	6
-35	7
-32	8
-27	9
-20	10
-11	11
0	12
13	13
28	14
45	15
64	16
85	17
108	18
133	19
160	20



خصوصية التمثيل المحصل عليه أن النقط تقع على فرع من قطع مكافئ

2) التخمين في إيجاد عبارة v_n بدلالة n لكل عدد طبيعي n .

إذا كانت النقط تقع على فرع من قطع مكافئ فإن:

$v_n = an^2 + bn + c$ وحسب الجدول السابق فإن: $v_0 = 0$ ومنه

$c = 0$ و $v_n = an^2 + bn$ لتعيين a,b نلاحظ أن :

$v_1 = -11, v_2 = -20$ ومنه $-11 = a + b$ و $-20 = 4a + 2b$

أي: $a = 1, b = -12$ و $v_n = n^2 - 12n$

3) برهان صحة التخمين .

نبرهن بالتراجع على أن: $v_n = n^2 - 12n$ لكل عدد طبيعي n

أ) $p(0)$ صحيحة لأن: $v_0 = 0$

ب) نفرض صحة $p(n)$ أي: $v_n = n^2 - 12n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي: $v_{n+1} = (n+1)^2 - 12(n+1) = n^2 - 10n - 11$

$v_{n+1} = v_n + 2n - 11 = n^2 - 12n + 2n - 11 = n^2 - 10n - 11$