الدوال

1- الدوال الأسية

1- النهايات

* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
* $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x - 1} = \text{ح-ع-ت}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cancel{\frac{x}{e^x}}^{\to 0}}{1 - \cancel{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

ملاحظة:

لكي نجنب حالة عدم تعيين أخرج e^x عامل مشترك أو أخرج x عاملا مشتركا في بعض الحالات.

2- خواص:

1) $e^0 = 1$
2) $e^{\ln x} = x$
3) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
4) $e^x = -3$ (مستحيل)، $e^x > 0$

3- الاشتقاق:

* $f(x) = e^{3x+1}$

$f'(x) = 3e^{3x+1}$

* $g(x) = x e^x$

$g'(x) = 1e^x + e^x(x)$

$= (1 + x)e^x$

2- الدوال اللوغاريتمية

1- النهايات:

* $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

مثال:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = \text{ح-ع-ت}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \cancel{x}^{\to +\infty}\left(2 - \cancel{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \left[\cancel{\frac{3}{x+1}}^{\to +\infty} + \cancel{\ln(x+1)}_{\to -\infty}\right] = \text{ح-ع-ت}$

$$= \lim_{x \to -1} \cancel{\frac{1}{x+1}}_{\to +\infty}\left[3 + \cancel{(x+1)}_{\to 0} \ln(x+1)\right] = +\infty$$

ملاحظة:

لكي نجنب حالة عدم تعيين عند ∞ خرج ما داخل الـ $\ln$ عاملا مشتركا أما إذا كانت حالة عدم تعيين عند عدد أخرج مقلوب ما داخل الـ $\ln$ عاملا مشتركا، تبقى ملاحظة نسبية.

ملاحظة خطيرة :

رد بالك دايرها حالة عدم تعيين : $\frac{0}{\infty} = 0$ ، $\frac{\infty}{0} = \infty$

$\frac{A}{\infty} = 0$ ، $\frac{A}{0} = \infty$

2- خواص :

1) - $\ln 1 = 0$

2) - $\ln e^{x} = x$

3) - $\ln x = 2$ يكافئ : $x = e^{2}$

4) - $\ln x = -3$ يكافئ : $x = e^{-3}$

3- الاشتقاق :

• $f(x) = \ln(3x+1)$

$f'(x) = \frac{3}{3x+1}$

• $g(x) = x \ln x$

$g'(x) = 1 \ln x + \frac{1}{x} x$

$= \ln x + 1$

3- الدفاتر اللي لازم تعرفها :

1- اثبات $y = ax+b$ مستقيم مقارب مائل لجوار ∞ :

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

2- الوضعية :

• $f(x) - (ax+b) < 0$

C_f تحت (Δ).

• $f(x) - (ax+b) > 0$

C_f فوق (Δ).

مثال :

$f(x) = x + 2 + \frac{\ln x}{x}$

اثبات أن : $y = x+2$ مستقيم مقارب مائل :

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

الوضعية :

$f(x) - (x+2) = \frac{\ln x}{x}$

يكافئ : $\ln x = 0$

$x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		C_f تحت (Δ)	تقاطع	C_f فوق (Δ)	

ملاحظة :

$\ln x < 0$ يعني : $0 < x < 1$

$\ln x > 0$ يعني : $x > 1$

3- المستقيم المقارب العمودي :

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

$x = a$ مستقيم مقارب عمودي

لجوار ∞ ، يتكون في مجموعة التعريف وهو العدد غير المعرفة فيه الدالة

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$x = 0$ م.م عمودي

④- المستقيم المقارب الأفقي:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$

$y=a$ مستقيم مقارب أفقي بجوار ∞

جدول نهايات:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$y=0$ م.م أفقي

⑤- معادلة المماس عند x_0:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

مثال: $x_0 = -2$.

$f(x) = x^2 + 6x - 1$

$f'(x) = 2x + 6$.

$f(-2) = -9$ ، $f'(-2) = 2$

$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$

$y = 2(x+2) - 9$

$\boxed{y = 2x - 5}$

⑥- نقطة الانعطاف:

$f''(x) = 0$ $(x_0 , f(x_0))$

مثال: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6$.

$f''(x) = 0$ يكافئ

$6x + 6 = 0$ أي $\boxed{x = -1}$

$W(-1, f(-1))$ أي $W(-1, 1)$

⑦- نقطة تقاطع C_f مع المحورين:

أ- مع محور الفواصل:

$f(x) = 0$

$(x_0 , 0)$

ب- مع محور التراتيب:

$f(0) = ?$ ، $(0, y_0)$

⑧- التناظر:

أ- مركز تناظر:

$W(\alpha, \beta)$

$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

مثال: لو قلت:

$f(4 - x) + f(x) = 6$

نستنتج: $W(2, 3)$

ب- محور تناظر: $x = \alpha$

$f(2\alpha - x) = f(x)$.

⑨- الانسحاب:

$g(x) = f(x + a) + b$

C_g صورة C_f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ ، $f(x) = e^x$

$g(x) = e^{x+2} + 3$

C_g صورة C_f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

⑩- عفاريت المعاملات a, b, c:

مثال: لكي يقال أوجد a, b, c علما أن C_f يشمل $A(2,3)$ ويقبل مماس عند A معامل توجيهه 4 و يشمل ذروة أي قيمة حدية هي $B(-1,2)$ ، ويشمل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند الفاصلة 5

الحل: $f(2) = 3$ يشمل A

$f'(2) = 4$ يقبل مماس عند A.

الذروة : $(-1, 2)$

$f(-1) = 2$ } يشملها ع .

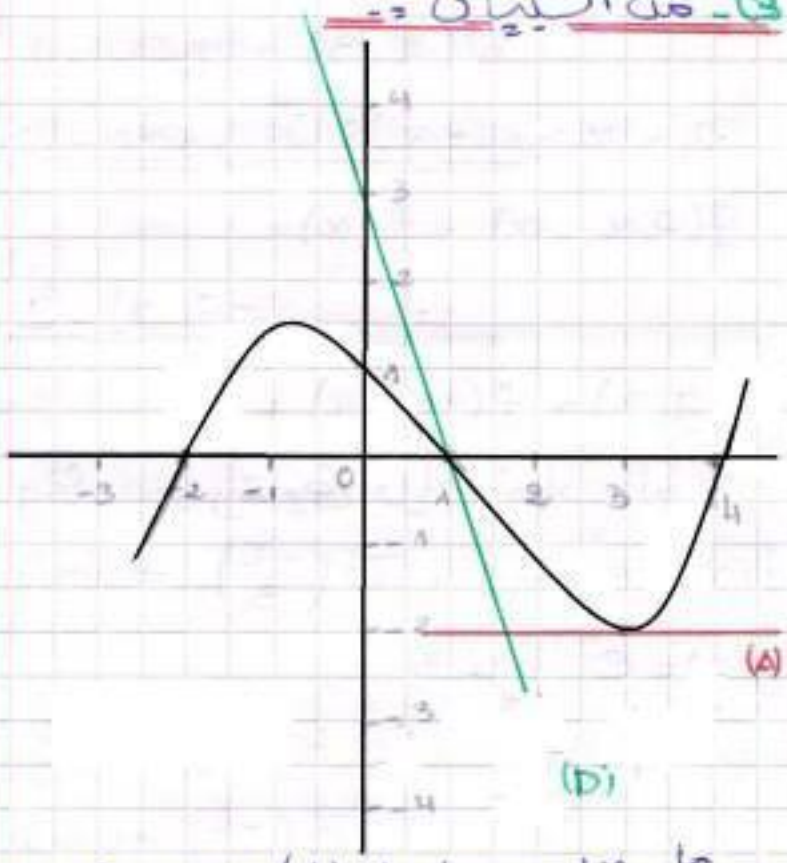
$f'(-1) = 0$ } وتعدم المشتق .

مماسا أفقي $f'(5) = 0$

② - إذا أعطاك العبارة وقالك جيب a ، b ، c وحد المقامات وطابق

"بلا ما تزيدوا تفصلوا"

③ - من البيان :-



ع يقبل مماسا (Δ) عند $x = 3$ ، و تقبل مماسا (D) عند 1

عين من البيان : $f'(3)$ ، $f(1)$ ، $f'(1)$

المماس موازي لمحور الفواصل : $f'(3) = 0$

$f(1) = 0$

خرج نقطتين يمر بهم المماس (D)

$A(0, 3)$ ، $B(1, 0)$

قيمة $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - 0}{0 - 1} = -3.$$

⑪ - الوسيط m :-

1) $f(x) = m$

أرسم مستقيمات أفقية موازية لمحور الفواصل و تقاطعهم مع الدالة هي الحلول.

2) $f(x) = m + 2$

نفس المناقشة السابقة

$0 < m + 2 < 3$

$-2 < m < 1$

3) $f(x) = x + m$

جيب المستقيمات لي يكون فيها معامل التوجيه

$y = x + m$

$y = x + 2$

مطابقة : $m = 2$ ، $m > 2$ ، $m < 2$

⑫ - الاستمرارية :-

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$ مستمرة عند 2

* كل دالة مستمرة على مجال تعريفها.

⑬ - الإشتقاق :-

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

أو :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال :-

$f(x) = \ln x$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$$

* قابلة للإشتقاق عند 1

$f'(1) = 1$ و تقبل مماسا عند 1

⑭ - الدوال الأصلية

1)- $f(x) = 2x^3 + 5x - 1$

$F(x) = \frac{2x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} - x + C$

2)- $f(x) = \frac{3}{3x-1}$

$F(x) = \ln(3x-1) + C$

3)- $f(x) = e^{2x-1}$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-1}$

4)- $f(x) = 2(2x-1)^7$

$F(x) = \frac{(2x-1)^8}{8} + C$

⑮ - المعادلات التفاضلية

$y' = ay \Longrightarrow f(x) = Ce^{ax}$

$y' = ay + b \Rightarrow f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال :- $y' - 2y = xe^x$ ---- ①

① - أوجد a ، b حتى تكون $u(x)$

حلا لـ ① : $u(x) = (ax+b)e^x$

عوض : $u' - 2u = xe^x$

طابق تجد : $a = -1$

$b = -1$

$u(x) = (-x-1)e^x$

② - حل المعادلة (2) :

$y' - 2y = 0$ ---- ②

$y' = 2y \rightarrow y(x) = Ce^{2x}$

③ - حلول (1) هي : $y + u$

$f(x) = u(x) + y(x)$

$f(x) = (-x-1)e^x + Ce^{2x}$

الحل الخاص :

$f(0) = 2$

$(-0-1)e^0 + Ce^0 = 2$

$C = 3$

$f(x) = (-x-1)e^x + 3e^{2x}$

بالتوفيق للجميع

الهندسة الفضائية

① المسافة بين نقطتين :-

$A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2+(3+1)^2}=\sqrt{21}$$

② المسافة بين نقطة ومستوي :-

$A(1,1,-2)$

$(P): 2x-3y+4z+5=0$

$$d(A,P)=\frac{|2(1)-3(1)+4(-2)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(4)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{29}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

③ التوازي :-

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

نقول أن $\vec{u}\parallel\vec{v}$ إذا كان: $\vec{u}=k\vec{v}$

$$\frac{2}{1}=\frac{-4}{-2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

إذن متوازيان $\Rightarrow \vec{u}=2\vec{v}$.

ب- التعامد :-

$\vec{u}(2,1,0)$ ، $\vec{v}(2,-4,1)$

نقول أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان

$\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

$2(2)-4(1)+1(0)=0$

ومنه متعامدان .

ملاحظة :-

① - كل شعاعان غير متوازيان فهما متقاطعان .

② - نقول على أن النقط A ، B ، C تعين مستوي أو ليست على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا (غير متوازيان)

④ - معادلة ديكارتية لمستوي :-

أ- يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له :-

$\vec{n}(3,2,-2)$ ، $A(1,2,3)$

$ax+by+cz+d=0$

$3x+2y-2z+d=0$

نعوض A لإيجاد d :-

$3(1)+2(2)-2(3)+d=0$

$\boxed{d=-1}$

$(P): 3x+2y-2z-1=0$

ب- يشمل A ، B ، C :-

$A(1,1,1)$ ، $B(2,3,4)$ ، $C(-1,2,4)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمي ، $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ شعاعي توجيه لـ (P) :

$\vec{n}\perp\vec{AB}$ ، $\vec{n}\perp\vec{AC}$ يعني: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}$

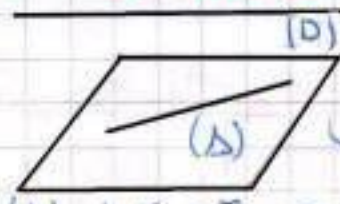
$$\begin{cases}a+2b+3c=0\\-2a+b+3c=0\end{cases}$$

افرض a أو b أو c وساويها بـ 1 ثم أكمل نفس خطوات المستوي نتاع (P) السابقة.

ج- يشمل A ويعامد مستقيم (Δ) :-

وبرقي بالك بلي $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{n}$ نتاع المستوي وعندك النقطة A ، واش قاعد تستنى !!!

ج- مستوي يحوي (Δ) ويوازي (D):



$\vec{u}_D$ و $\vec{u}_\Delta$ شعاعي توجيه لـ (P)، جيب بينهم الناظمي وافرض قيمة لـ (t) في (Δ) نجد نقطة يعبر بها (Δ) أي يعبر بها (P) ثم أكمل الخطوات

ج- تمثيل وسيطي لمستوي:

$A(-3,2,5)$ ، $\vec{v}(3,-2,1)$

نفرض: $M \in (P)$ ، $\vec{u}(1,2,4)$.

$$\vec{AM} = t\vec{v} + k\vec{u}$$

$$(P)\begin{cases} x = 3t + k - 3 \\ y = -2t + 2k + 2 \\ z = t + 4k + 5 \end{cases}$$

$(t,k) \in \mathbb{R}$

ج- تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ):

أ- يشمل A و $\vec{u}$ توجيهاً له:

$A(1,-2,3)$ ، $\vec{u}(4,5,-6)$

نفرض $M \in (\Delta)$ وإذن: $\vec{AM} = t\vec{u}$

$$(\Delta)\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -6t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ب- يشمل A و B:

دير فيه بالك $\vec{AB}$ هو نفسه $\vec{u}$ و عندك زوج نقاط A أو B عوض واحدة فيهم وسكر هلك!!!

ج- يشمل A ويعامد مستوي (P):

ما بنعاوش نعاودو، عندك $\vec{n}$ نتاع المستوي هو نفسه $\vec{u}$ نتاع المستقيم وعندك A، أيضاً توكل على ربي.

4) معادلة الكرة (S):

أ- مركزها $W(1,2,-3)$ ونصف قطرها (2): $M \in (S)$ ، $WM = r$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2^2 = 4$$

ب- علم قطرها [AB]:

$\vec{AM} \perp \vec{BM}$

أي: $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

3) الأوضاع النسبية:

أ- الوضع النسبي لمستقيم و مستوي:

نكتب التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة المستوي (P).

① إذا لقيت قيمة لـ (t) بحيث تقاطع في نقطة.

② إذا لقيت تناقض أي مثلاً: $3=0$ يعني التقاطع مجموعة خالية.

③ إذا لقيتها محققة مثلاً: $0=0$ نقول أن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P).

ب- الوضع النسبي لمستقيم وكرة (S):

عوض (Δ) في (S) تجيك معادلة من الدرجة الثانية بدلالة الوسيط t

① $\Delta < 0$ لا توجد تقاطع.

② $\Delta > 0$ تقاطع في نقطتين.

③ $\Delta = 0$ مستقيم مماس لـ (S).

ج- الوضع النسبي لمستوي و كرة (S):

لحسب المسافة بين مركز الكرة (S) والمستوي (P):

① - إذا القيت المسافة أكبر من نصف القطر نقول أنه لا يوجد تقاطع.

② - إذا القيت المسافة تساوي نصف القطر نقول مماس في نقطة.

③ - وإذا كانت أصغر من نصف القطر تقاطع في دائرة. $R^2 = r^2 + d^2$

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ، r: نصف قطر الدائرة

د- مستقيمان من نفس المستوي أو ليسا من نفس المستوي:

① - إذا كان (Δ) // (Δ') نقول هما من نفس المستوي.

② - إذا كانا غير متوازيان تساويهم مع بعضاهم: (1) $x = x$

(2) $y = y$ (Δ) (Δ')

(3) $z = z$

من المعادلة (1) و (2) نخرج قيمة t ونعوضهم في المعادلة (3).

* إذا كانت محققة من نفس المستوي

* إذا كانت موش محققة موش من نفس المستوي.

⑨ - عمود بين المستوي والمستقيم:

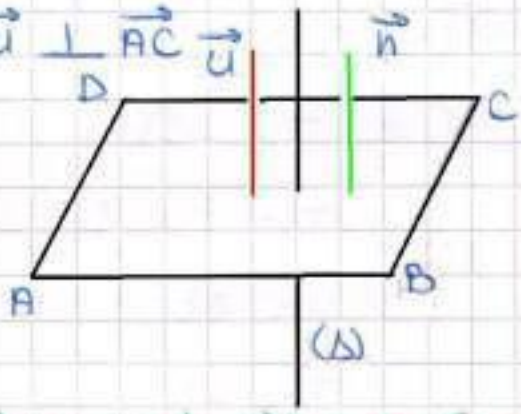
$\vec{n} \parallel \vec{u}$ يعني: $(\Delta) \perp (P)$

$\vec{n} \perp \vec{u}$ يعني: $(\Delta) \parallel (P)$

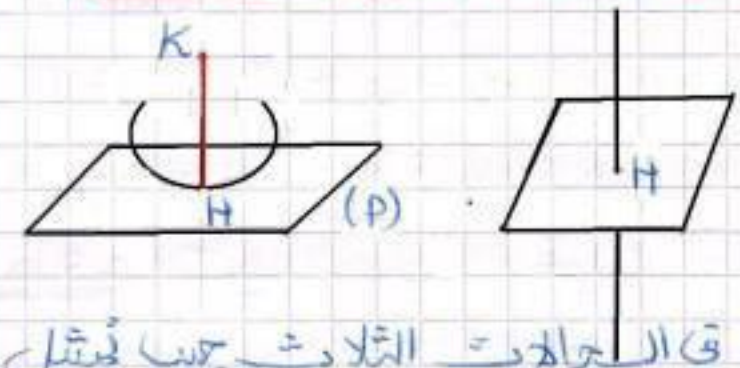
إذا قالك بيّن أن (Δ) يعامد المستوي (ABC):

إما أن تثبت أن $\vec{u}_\Delta \parallel \vec{n}_{ABC}$

أو تثبت أن: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC} \end{cases}$



⑩ - إيجاد إثبات H المسقط العمودي وتقاطع مستقيم مع مستوي ونقطة تماس مستوي مع كرة (S):



في الحالات الثلاث جيب نمثل وسيطي للمستقيم ولكن في المستوي نجد قيمة لـ (t) ثم عوضها في (Δ) تلقى النقطة H

دير في بالك $(P) \perp (\Delta)$

$\vec{n}$ هو نفسه $\vec{u}$ وأكهوا؟!!

⑪ - المسافة بين نقطة ومستقيم:

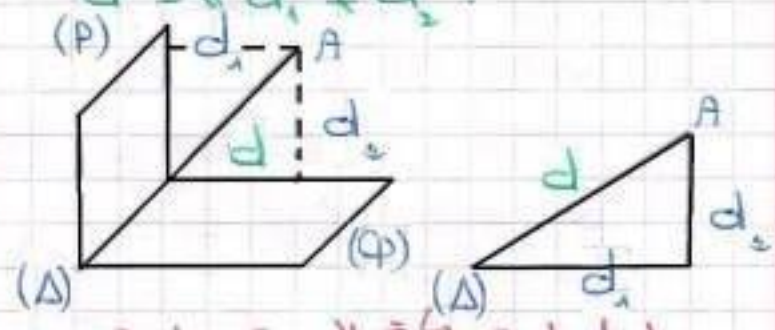
أ- إذا كان: $(\Delta) = (Q) \cap (P)$

$(Q) \perp (P)$

حسب نظرية فيثاغورس:

$d^2 = d_1^2 + d_2^2$.

$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$.



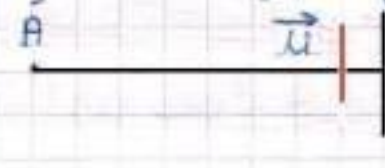
ب- إذا ما عند كش المستويات:

ط1: $M(t+1, 2t, -t)$

$A(2, 5, -1)$

$$(\Delta)\begin{cases} x = t+1. \\ y = 2t. \\ z = -t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أكتب الشعاع $\vec{AM}$ بدلالة t حيث



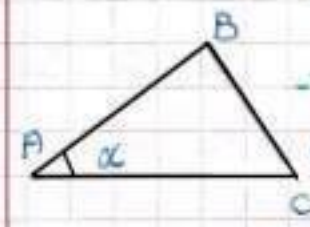
أي $\vec{u} \perp \vec{AM}$

$\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

تلغى قيمة t عوضها في (Δ) تلغى M ومنه المسافة هي الطول AM

ط2: أكتب الطول AM تجيك دالة نشاع جذر بدلالة t اشتقها والقيمة الحدية هي المسافة

مساحة مثلث:



$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$

إذا كان: $\alpha = 90$ يعني:

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$

حجم رباعي الوجوه DABC:

$(ABC) \perp (AD)$

$V = \frac{S_{ABC} \times AD}{3}$

مجموعات النقط:

أ) $GM = 3$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 3.

ب) $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

سطح كرة قطرها [AB].

ج) $\vec{GM} \cdot \vec{BC} = 0$

مجموعة النقط M هي مستوي يشمل G و $\vec{BC}$ ناظمي له.

د) $AM = BM$

مجموعة النقط M هي مستوي محور القطعة [AB]

بالتوفيق للجميع

الأعداد المركبة

① - الطويلة : $|z|$ ، $i^2 = -1$

$z = 2 + 3i$

$|z| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

أطو نسبو لـ نخل في الطويلة

$z = 1 + \sqrt{3}\, i$

$|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

الشكل الأسي : $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

الشكل المثلثي : $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ملاحظة : "احفظ"

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$ ، $\frac{1}{2} = 0{,}5$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

باش تجيك ساهلة الانتقال

من الشكل الأسي والمثلثي إلى الجبري

$z = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$

لدينا : $z = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{3\times 180}{4} = -0{,}707 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{3\times 180}{4} = 0{,}707 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

إذن : $z = 2\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

② - عقابيس الشكل :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

أ - $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha i$ ، α سالب الزاوية $-\frac{\pi}{2}$. ، α موجب الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

① - إذا كانت $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$ نقول ABC قائم في A ومتساوي الساقين

② - إذا كانت $\alpha \neq 1$ أو $\alpha \neq -1$ نقول ABC قائم في A فقط .

ب) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ABC مثلث متقايس الأضلاع

ج) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$

α عدد حقيقي نقول أن A ، B ، C على استقامة واحدة أي : $\vec{AC} = \alpha\vec{AB}$

د) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$

نكتب $z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)$

نقول يوجد تحويل نقطي مركزه A و يحول B إلى C وطبيعته حسب العدد α .

ملاحظة : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} = \pm 1$

* يعني ABCD متوازي أضلاع $\vec{AB} = \vec{DC}$
* " " ABDC $\vec{AB} = \vec{CD}$

③ - التفسير الهندسي للعمدة و

الطويلة : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$

$\frac{|AC|}{|AB|} = |\alpha|$ أي $AC = |\alpha| AB$

$\arg(\alpha) = (\vec{AB}, \vec{AC})$

④ - دستور موافر :

$$z^n = |z|^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$$

1 - z^n حقيقي : يعني التخيلي معدوم

$\sin n\theta = 0$ أي $n\theta = k\pi$

2- "z تخيلي": يعني الحقيقي معدوم

$\cos n\theta = 0$ أي: $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

5- التحويلات النقطية:

$$\boxed{z' = \alpha z + \beta}$$

نبي نقلك أوجد C صورة B بالتحويل النقطي الذي مركزه A (دبر فيه بالك بلي z_C جتي مكان z')

الكتابة مباشرة:

$$z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)$$

إذا قالك جيب العبارة المركبة

$$z_C = \alpha z_B + \beta$$

$$z_A = \alpha z_A + \beta$$

بالطرح

حل الجملة وخرج α و β.

إذا عطاك دوران مركزه O يعني: $\{\beta = 0\}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ متناسق "$|\alpha| = 1$" أي:

$$\alpha = 1 e^{\frac{2\pi}{3} i}$$

والكتابة α على الشكل الجبري إذا جبت.

$$\boxed{z' = \alpha z + \beta}$$

α عدد مركب	α عدد حقيقي
$\lvert\alpha\rvert = 1$ دوران	$\alpha = 1$ انسحاب شعاعه β
$\lvert\alpha\rvert \neq 1$ تشابه مباشر	$\alpha \neq 1$ تحاكي

عناصره هي:

$|\alpha|$ نسبته.

$\arg(\alpha)$ زاويته.

مركزه: $z_\omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$

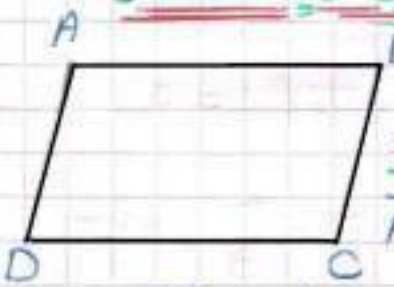
6- المرجح G $\{(A,1),(B,-1),(C,3)\}$

$$z_G = \frac{1z_A - z_B + 3z_C}{1 - 1 + 3}$$

إذا كان G مركز مثلث ABC هي المعاملات: $1, 1, 1$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

7- طبيعة الرباعيات:



$\vec{AC}$ ، $\vec{DB}$ قطران

أ- متوازي أضلاع: $\vec{AB} = \vec{DC}$

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

ب- مستطيل: القطران $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ متساويان ومتناصفان وموثق متعامدان. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

ج- مربع: القطران $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ متساويان ومتناصفان ومتعامدان $\vec{AB} = \vec{DC}$.

د- معين: القطران $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ غير متساويان ومتناصفان ومتعامدان $\vec{AB} = \vec{DC}$.

ملاحظة:

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

و

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha i$$

إذا كان:

بالتوفيق للجميع

أ)- دوران
- $\frac{\pi}{2}$ = مربع
- $\frac{\pi}{2} \neq$ معين

ب)- تشابه
- $\frac{\pi}{2}$ = مستطيل
- $\frac{\pi}{2} \neq$ متوازي أضلاع

4)- المثلثات: أحسب الأطوال

$AB = AC = BC$ متقايس الأضلاع

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ قائم في A إذا كان

$AB = AC$ زيد لهم متساوي الساقين

5)- مجموعات النقط:

أ- $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 12$

دخل المرجح G: $3MG = 12$

$MG = 4$

دائرة مركزها G و $r = 4$.

(ياو راينا في الأعداد المركبة رد بالك تقولي سطح كرة).

ب- $\vec{GM} \cdot \vec{AB} = 0$

مستقيم يشمل G والعمودي على (AB)

ج- $|z - z_A| = |z - z_B|$

$AM = BM$ مستقيم محور القطعة $[AB]$.

د- $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4}$ نصف مستقيم $[AM)$ مبدؤه النقطة A.

المتتاليات

1-

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية
$U_5 = U_3 \cdot q^2$	$U_5 = U_3 + 2r$
$(5-3) = 2$	$(5-3) = 2$
$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$	$U_n = U_p + (n-p)r$
$U_1 \times U_3 = U_2^2$	$U_1 + U_3 = 2U_2$
إذا كانت عندك جملة معادلتين عوضها في معادلة الضرب.	إذا كانت عندك جملة معادلتين عوضها في معادلة الجمع
$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$	$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
عدد الحدود: $n-0+1$	عدد الحدود: $n-0+1$
$= U_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$	$= \dfrac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

2- البرهان بالتراجع:

$U_0 = 4$

$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 1$

برهن بالتراجع: $U_n > 2$

أولا: نثبت صحة الشرط الابتدائي

$U_0 = 4$ ، $4 > 2$

إذن محقق.

ثانيا: نفرض $U_n > 2$ صحيحة

ونبرهن صحة U_{n+1}

أي نبرهن أن $U_{n+1} > 2$

ننطلق من: $U_n > 2$

نضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} U_n > 2 \cdot \frac{1}{2}$

نضيف 1 للطرفين:

$\frac{1}{2} U_n + 1 > 1 + 1$

$U_{n+1} > 2$

إذن صحيحة ومنه: $U_n > 2$ صحيحة.

ملاحظة:

كل استنتاج يأتي بعد البرهان بالتراجع نقول إن (U_n) محدودة من الأعلى أو من الأسفل.

1- $U_n > 2$ محدودة من الأسفل بـ 2

2- $U_n < 2$ محدودة من الأعلى بـ 2.

3- إتجاه التغير:

متناقصة $U_{n+1} - U_n < 0$

متزايدة $U_{n+1} - U_n > 0$

المثال السابق:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n + 1 - U_n$

$= -\frac{1}{2} U_n + 1$

$= -\frac{1}{2}\left[U_n + \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right]$

$= -\frac{1}{2}[U_n - 2]$

نقول بما أن: $U_n > 2$

$U_n - 2 > 0$

نضرب في $-\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2}(U_n - 2) < 0$

$U_{n+1} = \boxed{\frac{2}{3}} U_n + 2$

$\frac{2}{3}$ أساس المتتالية (v_n)

البرهان:

$v_n = U_n - 6$

$v_{n+1} = U_{n+1} - 6$

$v_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + 2 - 6$

$v_{n+1} = \frac{2}{3} U_n - 4$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}\left[U_n - \frac{4 \times 3}{2}\right]$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}\left[U_n - 6\right]$

$v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$.

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

8- عقدة الجملة:

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = K \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = K' \end{cases}$$

أ- إذا كانت هندسية:

الوسط الهندسي: $U_1 \times U_3 = U_2^2$

نعوضها في معادلة الضرب تلقى قيمة لـ U_2.

$U_2^3 = K$

$U_2 = \sqrt[3]{K}$

الأساس q: الكتب.

$U_3 = U_2 \cdot q$.

$U_1 = \frac{U_2}{q}$.

عوض قيمة U_3 و U_1 بدلالة U_2 و الأساس في معادلة الجمع

تجيك معادلة من الدرجة (2):

حلها بالمميز: $aq^2 + bq + c = 0$

خذ الأساس:

① $0 < q < 1$ إذا قالك متناقصة

مثلا: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$

② $q > 1$ إذا قالك متزايدة

مثلا: 2 ، 4 ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{3}$

ب- إذا كانت حسابية:

الوسط الحسابي: $U_1 + U_3 = 2U_2$

عوضها في معادلة الجمع تلقى قيمة U_2.

الأساس r:

الكتب: $U_3 = U_2 + r$

$U_1 = U_2 - r$

عوض قيمة U_3 و U_1 بدلالة U_2 و r في معادلة الضرب. تجيك معادلة من الدرجة الثانية:

$ar^2 + br + c = 0$

خذ الأساس:

① $r < 0$ إذا قالك متناقصة

-2 ، -3 ، $\frac{-5}{2}$.

② $r > 0$ إذا قالك متزايدة

2 ، 3 ، $\frac{5}{2}$ ، $\frac{7}{4}$.

9- عقدة المجموع:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

(v_n) هندسية طبق قانون المجموع

* إذا كانت:

$U_n = V_n + 3$

$S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

إذن:- $U_n = V_n + 3$

$S'_n = S_n + 3\underbrace{(n+1)}_{\text{عدد الحدود}}$

* إذا كانت:

$K_n = V_0^2 + V_1^2 + \dots + V_n^2$

قم بتربيع الحد الأول والأساس واحسب المجموع

$K'_n = V_0^3 + V_1^3 + \dots V_n^3$

$K''_n = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \dots \frac{1}{V_n}$

* نفس الطريقة بتاع K'_n نقلب الحد الأول و الأساس وفي K''_n اقلب الحد الأول والأساس

* وهكذا هو..!؟».

عصام معروف

بالتوفيق للجميع