بن علو لخضر

امتحان بكالوريا –الجزائر-دورة جوان 2008

شعبة : العلوم التجريبية

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ النقط:

$A(1;3;-1)$ ؛ $B(4;1;0)$ ؛ $C(-2;0;-2)$ ؛ $D(3;2;1)$ و المستوى **(P)** الذي معادلته: $x - 3z - 4 = 0$

1) المستوى **(P)** هو: ج1) **(BCD)** ؛ ج2) **(ABC)** ؛ ج3) **(ABD)**

2) شعاع ناظمي للمستوى **(P)** هو: ج1) $\vec{n}(1;2;1)$ ؛ ج2) $\vec{n}(-2;0;6)$ ؛ ج3) $\vec{n}(2;0;-1)$

3) المسافة بين النقطة **D** و المستوى **(P)** هي: ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ؛ ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ؛ ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_0 , u_1 , u_2 , u_3 وَ u_4

جـــ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$.

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة.

جـــ - هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ ، النقطتين A و B التين لاحقتاهما z_A ، z_B على الترتيب حيث: $z_A = 2 + i$ ؛ $z_B = -2 - 2i$. عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر [AB]

3) لتكن C النقطة التي لاحقتها z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$. أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.

تطبيق: عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع: (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$.

1) أ-بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g(\frac{1}{2})$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق: $g(\alpha)=0$.

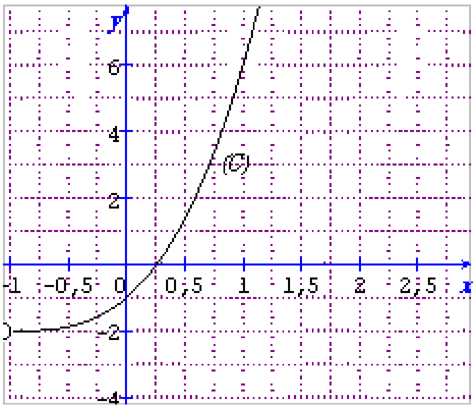
جــ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.



ب- عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج- أحسب : $\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و فسر النتيجتين بيانيا.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) نأخذ: $\alpha\cong 0,26$

أ-عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

ب- ارسم المنحنى (Γ).

4) أ) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

ب- عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=2$

الحل المفصل لامتحان –الجزائر-دورة جوان 2008

شعبة : العلوم التجريبية

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقط)

تعين الجواب الصحيح مع التعليل:

$A(1;3;-1)$ ؛ $B(4;1;0)$ ؛ $C(-2;0;-2)$ ؛ $D(3;2;1)$ و المستوى الذي معادلته: $(P): x-3z-4=0$

1) المستوى **(P)** هو: ج2) **(ABC)** لأن إحداثيات النقط **A** ، **B** ، **C** تحقق معادلة و إحداثيات D لا تحقق هذه المعادلة..... **0,25x3+ 0,5**

2) شعاع ناظمي للمستوى **(P)** هو: ج2) $\vec{n}(-2;0;6)$ لأنه مرتبط خطيا مع الشعاع الناظمي $\vec{m}(1;0;-3)$ للمستوى **(P)**

0,25x2 + 0,5..

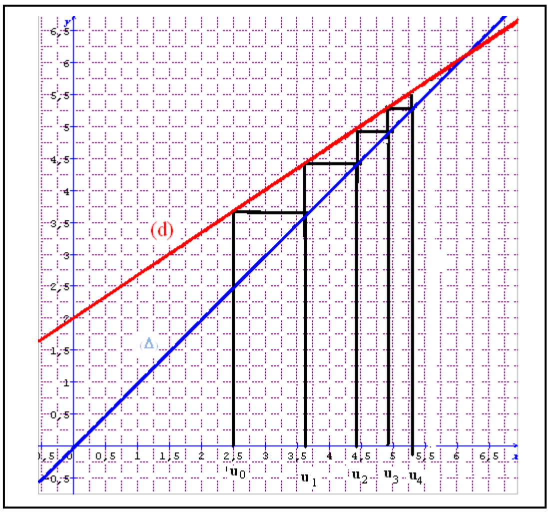
3) المسافة بين النقطة **D** و المستوى **(P)** هي: ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ لأن : $d(D.(P))=\frac{|3-3(1)-4|}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

0,25 + 0,5..

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 = f(u_n)$

1) أ– **رسم المستقيم (Δ) و المنحنى (d) و تمثيل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 وَ u_4**



2) $(\Delta) : y = x$ ؛ $(d) : y = f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ ..... **0, 5 + 0,25x2**

جـ **- نضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.** **0,25x2**

نلاحظ من الشكل أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة و تقارب 6.

3) أ– **نبر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$:**

نتحقق من أجل $n = 0$: لدينا: $u_0 = \frac{5}{2}$ وَ $\frac{5}{2} \leq 6$ (صحيحة) **0,25**

نفرض أنها صحيحة من اجل n، أي $u_n \leq 6$ **0,25**

نبرهن أنها صحيحة من أجل n+1 أي نبرهن أن $u_{n+1} \leq 6$ ؟ **0,25**

لدينا: $u_n \leq 6$ يكافئ $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$ أي $u_{n+1} \leq 6$ (صحيحة)

📖 **الخلاصة**: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$.

ب– **تتحقق أن (u_n) متزايدة:** **0,25x2**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_u = -\frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{6 - u_n}{3}$$

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$ يكافئ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ يكافئ (u_n) متزايدة تماما.

جـ – **هل (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك:** **0,25x2**

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ– **أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.**

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$ يكافئ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n + 6$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}(v_n + 6) - 4 = \frac{2}{3}v_n$ **0, 5**

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول v_0 حيث: $v_0 = u_0 - 6 = -\frac{7}{2}$ **0,25x2**

ب– **عبارة u_n بدلالة n**

$v_n = v_0\, q^n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ؛ $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$ **0,25x2**

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right) = 6$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ **0,25**

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) **حلول المعادلة** $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

$\Delta = i^2-4(-2-6i) = 7+24i = (19-9)+24i = (4)^2+(3i)^2+24i = (4+3i)^2$ .... **0,25x2+ 0,5**

$z_1 = \frac{-i+4+3i}{2} = 2+i$ ، $z_2 = \frac{-i-4-3i}{2} = -2-2i$ ، $\mathscr{S} = \{2+i; -2-2i\}$ .... **0, 5+ 0,5**

2) **تعيين** z_ω **لاحقة النقطة** ω **مركز الدائرة** (Γ) **ذات القطر** $[AB]$

ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$ يكافئ ω منتصف $[AB]$ يكافئ $z_\omega = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2+i-2-2i}{2} = -\frac{1}{2}i$

$z_\omega = -\frac{1}{2}i$ **0, 5**

3) **كتابة** z_C **على الشكل الجبري:**

C النقطة التي لاحقتها z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-4i-i-1}{2} = \frac{3-5i}{2}$ ، $z_C = \frac{3-5i}{2}$ **0, 5**

أثبت أن النقطة C **تنتمي إلى الدائرة** (Γ)**:** **0, 5**

(Γ) دائرة مركزها ω ونصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_A-z_B|}{2} = \frac{|2+i+2+2i|}{2} = \frac{|4+3i|}{2} = \frac{5}{2}$

$\omega C = |z_C - z_\omega| = \left|\frac{3-5i}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{3-4i}{2}\right| = \frac{5}{2} = r$ يكافئ $C \in (\Gamma)$

4) أ – **نبرهن أن عبارة التشابه المباشر** S **الذي مركزه** $M(z_0)$ **و نسبته** k $(k>0)$ **و زاويته** θ **و الذي يرفق بكل نقطة** $M(z)$ **النقطة** $M'(z')$ **هي :** $z'-z_0 = ke^{i\theta}(z-z_0)$ . ... **0,5 + 0,25x2**

بما أن S تشابه مباشر يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ فعبارته المركبة هي: $z' = az+b$ مع $a = ke^{i\theta}$

$M_0(z_0)$ مركز التشابه المباشر S معناه أن $S(M_0) = M_0$ يكافئ $z_0 = az_0+b$ يكافئ $b = z_0 - ke^{i\theta}z_0$

يكافئ $z' = az + z_0 - ke^{i\theta}z_0$ يكافئ $z'-z_0 = ke^{i\theta}(z-z_0)$

عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي :

$z'-z_0 = ke^{i\theta}(z-z_0)$

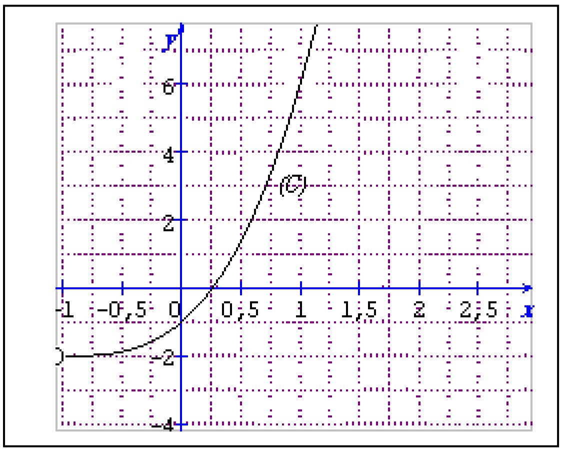
تطبيق: تعيين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S **المعرف بـ:** $z'+\frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

من السؤال السابق نلاحظ أن $k=2$ و $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ و $z_0 = z_\omega = -\frac{1}{2}i$

S تشابه مباشر مركزه $\omega\left(-\frac{1}{2}i\right)$ و نسبته $k=2$ $(k>0)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ **0,25x4**

التمرين الرابع: (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$.



1) أ- **بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g(\frac{1}{2})$** .

جدول تغيرات g: 0,25

x	-1 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
g	$-2 \nearrow +\infty$

$g(0) = -1$ ؛ $g(\frac{1}{2}) > 0$ 0,25x2

ب- **تعليل وجود عدد حقيقي α من المجال $]0\,;\frac{1}{2}[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$.**

من دراسة تغيرات g ؛ نلاحظ أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ و $g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$ 0,25

حسب نظرية القيم المتوسطة، يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0\,;\frac{1}{2}[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$. 0,25

جـ- **استنتاج إشارة g(x) على المجال $]-1\,;+\infty[$.** 0, 5

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

2) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يلي $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني

أ- **تتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1\,;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$** 0,25x2

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1\,;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2+6x+3)(x+1) \quad -2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب- **تعيين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وتفسير النتيجة بيانيا.**

لدينا: f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1\,;+\infty[$ و بالتالي f دالة قابلة للاشتقاق عند α ومنه:

$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 0$ 0,25x4

(Γ) له مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α. 0,25

جـ- **حساب: $\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و تفسير النتيجتين بيانيا.**

$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ يكافئ (Γ) له مستقيم مقارب معادلة له: $x = -1$ 0,25x2

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2} - (x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(x+1)^2} = 0\right]$$

(Γ) له مستقيم مقارب معادلة له : $y = x + 1$ 0,25x2

د- **جدول تغيرات الدالة f** 0, 5

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = +\infty$ 0,25

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ 0,25

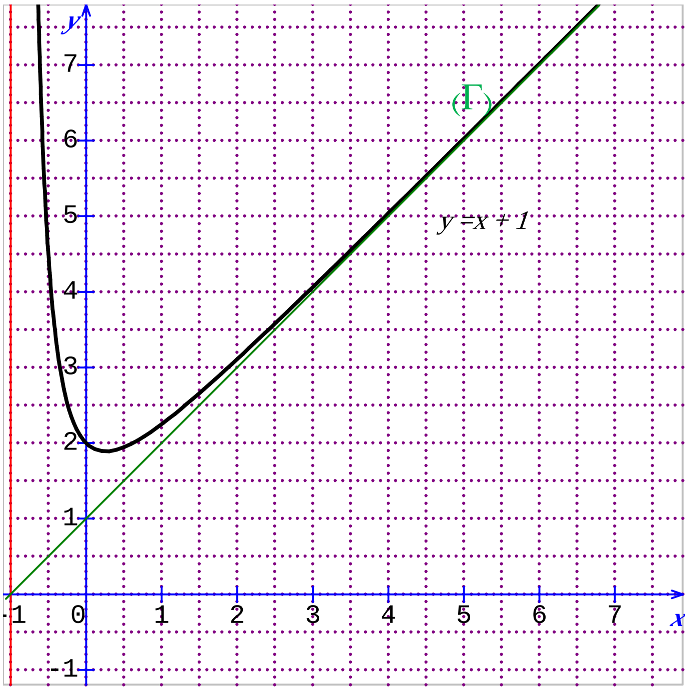
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) نأخذ: $\propto \cong 0{,}26$

أ- **تعيين مدور $f(\propto)$ إلى 10^{-2}**.

$f(\propto) \cong f(0{,}26) \cong 1{,}89$ 0,25

د- **رسم المنحنى (Γ)**. 0, 5



4) أ) **كتابة $f(x)$ على الشكل**: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a+2=3 \\ 2a+1=3 \\ a+b=2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ و منه $f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$ 0,25x2

ب- **تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1\,;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=2$**

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + C$ 0,25

$F(1) = 2$ يكافئ $1 + C = 2$ يكافئ $C = 1$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - \frac{1}{x+1}$ 0,25