وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | * دورة جوان 2008 *

الشعبة: العلوم التجريبية | المدة 03 ساعات و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـــ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B ، C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 ، θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته .

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته :

$$x+2y-z+7=0$$

و النقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

1- تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $y+2z-2=0$

2- أ- تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب – أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

3- لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$ حيث β,α عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ تنتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ وَ } u_{n+1}=f(u_n)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$

ب) عين النهاية : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ)بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا . (نذكّر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

ب) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

ج) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها .

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

هـ) ارسم (C_g) .

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$k(x)=g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A\left(1,3,-1\right)$ ، $B\left(4,1,0\right)$ ، $C\left(-2,0,-2\right)$ ، $D\left(3,2,1\right)$.

و المستوي $\left(P\right)$ الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1) المستوي $\left(P\right)$ هو: ج1) $\left(BCD\right)$ ، ج2) $\left(ABC\right)$ ، ج3) $\left(ABD\right)$.

2) شعاع ناظمي للمستوي $\left(P\right)$ هو :

ج1) $\overrightarrow{n_1}\left(1,2,1\right)$ ، ج2) $\overrightarrow{n_2}\left(-2,0,6\right)$ ، ج3) $\overrightarrow{n_3}\left(2,0,-1\right)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوي $\left(P\right)$ هي:

ج1) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني (05 نقط)

$\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة كما يلي:

$u_0=\dfrac{5}{2}$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+2$

1) أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي معادلته $y=x$ و المنحنى $\left(d\right)$ الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x+2$

ب- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0,u_1,u_2,u_3 وَ u_4

جـ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$ و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$.

ب- تحقق أن $\left(u_n\right)$ متزايدة .

جـ - هل $\left(u_n\right)$ متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ- اثبت أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

التمرين الثالث (05 نقط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_B=-2-2i \quad \text{و} \quad z_A=2+i$$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث $z_C=\dfrac{4-i}{1+i}$.

أكتب z_C على الشكل الجبري ثم اثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4. أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0\left(Z_0\right)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}\left(z-z_0\right)$

ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z'-\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع (07 نقط)

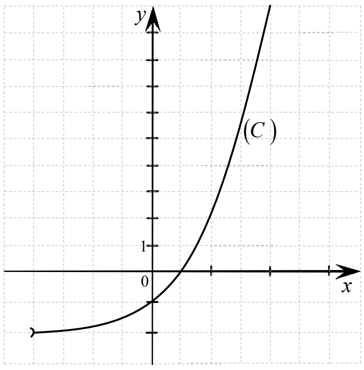
المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

-1 ا) – بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.



-2 f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا .

ج) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسّر النتيجتين بيانيا .

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 – نأخذ $\alpha\simeq 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4-أ) أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق : $F(1)=2$