الموضوع الأول

التمرين الأول (3.5 نقط)

1) حساب v_0 و v_1

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$

ومنه: $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$

2) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها

(v_n) متتالية هندسية معناه : $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\boxed{q = \frac{1}{3}}$

3-أ)حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ومنه: $S_n = v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] = 1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]$

$$\boxed{S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

ب)البرهان أن: $u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$ **من أجل كل** $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ومنه: $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1})$

بعد التبسيط نجد: $S_n = -u_0 + u_n$

ومنه: $u_n = u_0 + S_n$ وأخيرا: $\boxed{u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1}$

جـ) تبيين أن (u_n) متقاربة

(u_n) متقاربة معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ثابت

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1 = \frac{5}{2}$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

التمرين الثاني (05 نقط)

1) حل المعادلة $p(z) = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $p(z) = 0$ معناه : $(z-1-i)(z^2-2z+4) = 0$

معناه: $(z^2-2z+4) = 0$ أو $(z-1-i)$

ومنه: $(z-1-i) = 0$ أي : $z = 1+i$

$(z^2-2z+4) = 0 ....(e)$

لحل المعادلة (e) نستعمل المميز المختصر: $\Delta' = b'^2 - ac$

لدينا: $\Delta' = (-)^2 - (1)(4) = -3$ أي $\Delta' = (\sqrt{3}i)^2$

ومنه حلّي المعادلة (e) هما:

$$z' = \frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad ، \quad z'' = \frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

ومنه حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي:

$z = 1+i$ ، $z = 1+\sqrt{3}i$ ، $z = 1-\sqrt{3}i$

2- أ) كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي

لدينا: $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_2 = 1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري والأسي

الشكل الجبري:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$ بضرب حديه في مرافق المقام

وبعد الحسابات نجد:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

الشكل الأسي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

جـ)استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ **و** $\sin\frac{7\pi}{12}$

من الجواب السابق لدينا:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).....(1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}.....(2)$$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و(2) نجد:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

ومنه: $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3-أ) تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

لدينا:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i(\frac{7n\pi}{12})}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{7n\pi}{12}+i\sin\frac{7n\pi}{12}\right)$$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا معناه $\sin\frac{7n\pi}{12}=0$ ومنه: $n=12k\ (k\in\mathbb{Z})$

ب) حساب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

حسب دستور موافر لدينا:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{7(456)\pi}{12}+i\sin\frac{7(456)\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos0+i\sin0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}$$

لأن: $\frac{7(456)\pi}{12}=266\pi=(133)2\pi+0$

التمرين الثالث (04 نقط)

1- أ)تبيين ان المستوي (P) هو المستوي (ABC)

المستوي (P) هو المستوي (ABC) معناه أن احداثيات النقط A ، B ، C تحقق صحة معادلة (P)

لدينا: $A\in(P)$ لأن: $1+0-2+1=0$

$B\in(P)$: لأن: $0+0(2)-1+1=0$

$C\in(P)$: لأن: $2+0(1)-3+1=0$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC

لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1.1+2.1+-1.1=0$

ومنه المثلث ABC قائم في A

2-أ)التحقق أن النقطة D لا تنتمي للمستوي(ABC)

D لا تنتمي للمستوي(ABC) معناه : احداثيا النقطة D لاتحقق صحة المعادلة: $x-z+1=0$

لدينا: $2+0(3)-1(4)+1\neq0$ ومنه : $D\notin(ABC)$

ب) تعيين طبيعة ABCD

ABCD هو رباعي وجوه

3-أ) حساب المسافة بين D و المستوي(ABC)

لدينا: $d(D;ABC)=\frac{|1(2)+0(3)-1(4)+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD

$V=\frac{1}{3}s.h$ حيث $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $s=\frac{1}{2}AB.AC$

لدينا: $AB=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$$AC=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

ومنه $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين الرابع (7.5 نقط)

I)1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

لدينا: $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ و $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}(1+\frac{4}{x+1})=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(1+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

ملاحظة: يمكن استنتاج هده النهايات من البيان

ب)تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		-	‖	-	
g(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

2-أ) حساب نهاية f عند $+\infty$

g معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

ب) التحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right) = 0$$

جـ) دراسة تغيرات الدالة g

أتجاه التغير

لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x) = 1-\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x)=0$ معناه $(x-1)(x+3)=0$ أي : $x=1$

إشارة المشتق هي حسب الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-		+	
g(x)	4	↘	f(1)	↗	$+\infty$

ملاحظة: $f(1)=3$

II-1-أ)حساب $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

k معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

$$* \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$= \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h^2-3h}{h(h+1)} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h-3}{h+1} = -3$$

$$* \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$= \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{-h-5}{h+1} = -5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند0 لأن العدد المشتق من اليمين(-3) لايساوي العدد المشتق من اليسار(-5).

ب) اعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

بمأن الدالة k قابلة للإشتقاق من اليمن وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة التي فاصلتها 0.

يمكن القول ان النقطة التي احداثياها $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k

2)كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطةالتي فاصلتها $x_0=0$

معادلة نصف المماس (Δ_1)

(Δ_1) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0\geq 0$

لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

ومنه: $y=-3(x-0)+4$ أي $y=-3x+4$

معادلة نصف المماس (Δ_2)

(Δ_2) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0\leq 0$

لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

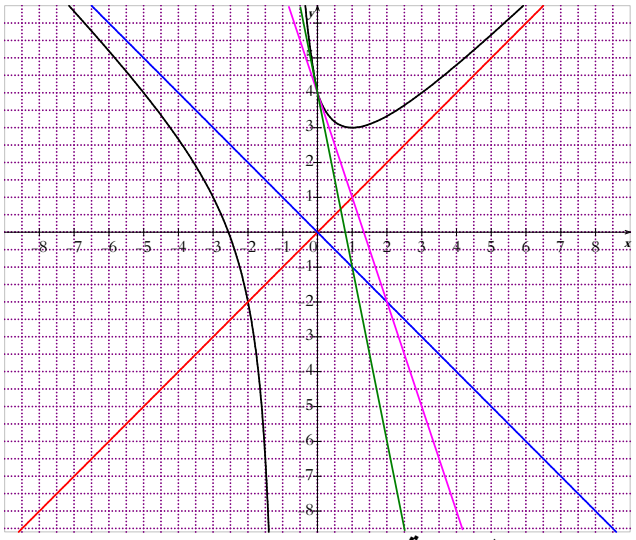
ومنه: $y=-5(x-0)+4$ أي $y=-5x+4$

3)رسم كلا من (Δ_1) و (Δ_2) والمنحنى (C_k)

لرسم المنحنى (C_k) نلاحظ:

إذا كانت $x\leq 0$ فإن: $k(x)=f(x)$ ومنه: $(C_f)=(C_k)$

إذا كانت $x\geq 0$ فإن: $k(x)=g(x)$ ومنه: $(C_g)=(C_k)$



4) حساب المساحة

نرمز بـ A لمساحة الحيز المستوي والمحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x=-\frac{1}{2}\ ،\ x=\frac{1}{2}\ ،\ y=0$$

ومنه:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}+4\ln 3 (u.a)$$

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي