وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2009

الشعبة: العلوم التجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضوع الأول

**التمرين الأول:** ( 03.5 نقطة)

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$

المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) أُحسب $v_0$ و $v_1$.

2) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ) أُحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$: $S_n=v_0+v_1+.....+v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ) بيّن أن $(u_n)$ متقاربة.

**التمرين الثاني:** ( 05 نقاط )

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و $Z$ عدد مركب

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع: $Z_1=1+i$ ؛ $Z_2=1-\sqrt{3}i$

أ) أُكتب $Z_1$ و $Z_2$ على الشكل الأسي.

ب) أُكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) $n$ عدد طبيعي.عيّن قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

**التمرين الثالث:** ( 04 نقاط)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$

1) $(P)$ مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$ .

أ) بيّن أن المستوي $(P)$ هو المستوي $(ABC)$.

ب) ما طبيعة المثلث $ABC$.

2) أ) تحقّق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى $(ABC)$.

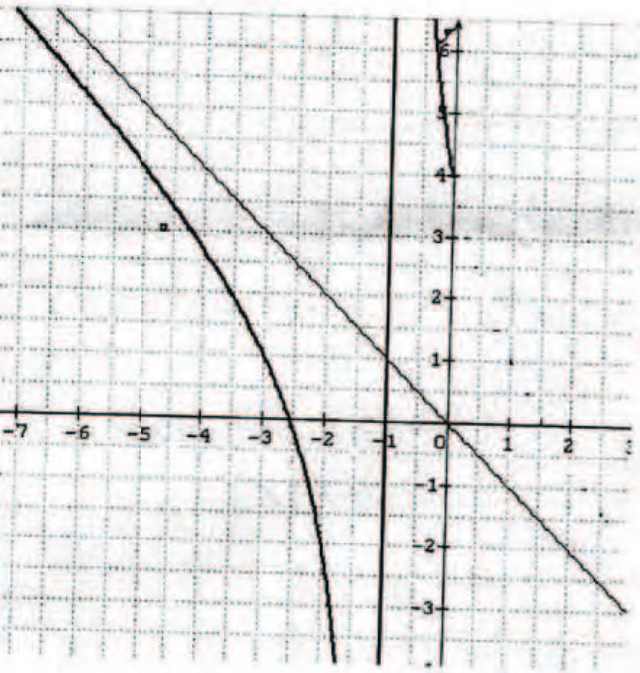
ب) ما طبيعة $ABCD$.

3) أ) أُحسب المسافة بين $D$ و المستوي $(ABC)$.

ب) أُحسب حجم $ABCD$.

**التمرين الرابع:** ( 07.5 نقطة)

I) $f$ دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$



$(c_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

1) أ) أُحسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات $f$ شكّل جدول تغيراتها.

2) $g$ دالة معرفة المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

$(c_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أُحسب نهاية $g$ عند $+\infty$ .

ب) تحقق من أن $(c_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلاً $(\Delta)$ عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أُدرس تغيرات $g$ .

II) $k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ) أُحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أُكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أُرسم $(\Delta_1)$، $(\Delta_2)$ و $(C_k)$.

4) أُحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_k)$ و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=-\dfrac{1}{2}$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $y=0$

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط:

$A(2;3;-1)$ ؛ $B(1;-2;4)$ ؛ $C(3;0;-2)$ ؛ $D(1;-1;-2)$ .

و ليكن $(\pi)$ المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$ .

**المطلوب:** أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1. النقط A، B ، C في استقامية.
2. $(ABD)$ مستوي معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$ .
3. المستقيم $(CD)$ عمودي على المستوي $(\pi)$.
4. المسقط العمودي للنقطة B على $(\pi)$ هو النقطة $H(1;1;-1)$ .

## التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة **C** المعادلة: $z^2-2z+4=0$
2. نسمي $z_1$ ؛ $z_2$ حلي هذه المعادلة.

أ) أكتب العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي.

ب) A، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right) \quad ; \quad z_B=1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_A=1-i\sqrt{3}$$

( i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$ )

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د) أحسب $Z^3$ و $Z^6$ ثم استنتج أن $Z^{3k}$ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول $u_1$ و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1. أ) أحسب $u_2$ و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول $u_1$.

ب) أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة n .

جـ) أحسب S حيث: $S=u_1+u_2+\dots+u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:

2. $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n \quad \text{و} \quad v_1=2$$

أ) أحسب $v_2$ و $v_3$.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

بين أن $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

جـ) أكتب $w_n$ بدلالة n ثم استنتج $v_n$ بدلالة n .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**الجزء الأول:**

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to -1^{>}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$ .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

**الجزء الثاني:** لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{\ln u}{u}=0$ .

جـ) استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

د) أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

هـ) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة y=2 عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و3,4 .

4. أرسم $(C_f)$.

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=x-1$ ؛ $x=0$ و $x=1$ .