تمرين:

(u_n) **متتالية عددية معرفة كما يلي:** $u_0 = 2$

ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

ـ 1.ا ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ **المستقيم** (Δ) **الذي معادلته** y = x

والمنحني (c) الممثل للدالة f المعرفة علي R كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

ـبـ باستعمال الرسم السابق مثل علي محور الفواصل وبدون حساب الحدود :

u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3

جـ ـ ضع تخمينا حول إتجاة تغير المتتالية وتقاربها .

2ـ ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يـكـون : $u_n \succ -6$

ب ـ تحقق من أن (u_n) **متناقصة**

جـ ـ هل (u_n) **متقاربة ؟ برر إجابتك.**

3ـ ا) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 6$

ـ أثبت ان (v_n) **متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول**

ب ـ أكتب عبارة v_n **ثم** u_n **بدلالة n ثم استنتج** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

جـ ـ احسب كلا من المجموعين : $A = \sum\limits_{p=0}^{p=9} v_p$ و $B = \sum\limits_{p=0}^{p=9} U_P$

د ـ احسب كلا من المجموعين بدلالة n

$$s_n = \sum_{p=0}^{p=n} v_n \quad \text{و} \quad s'_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_n$$

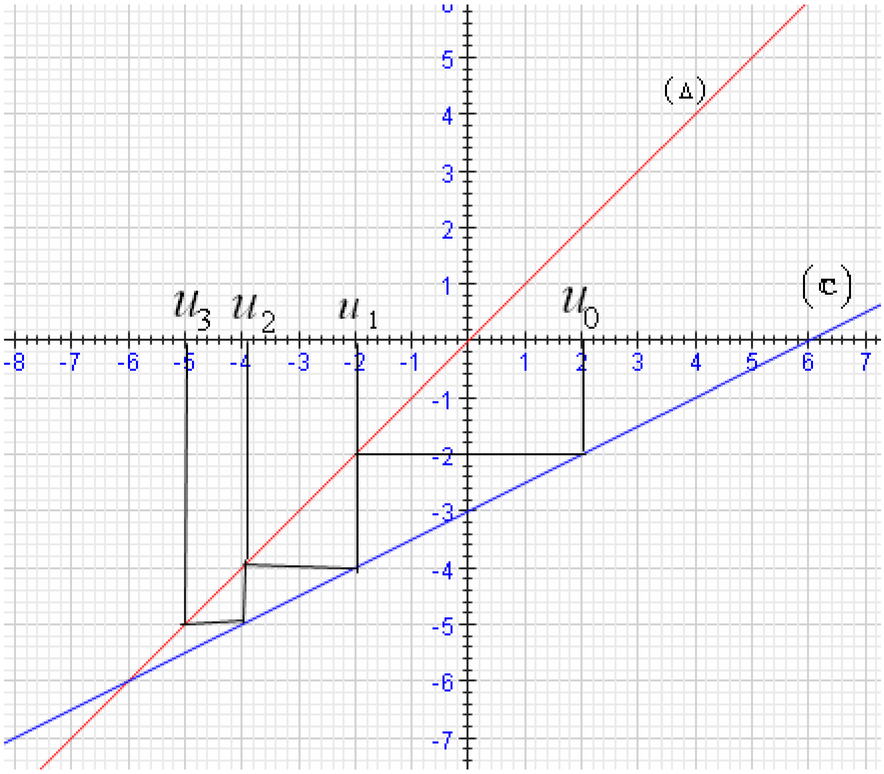
هـ ـ احسب الجداء: $L = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

مع تحيات : سليمان مهدي

الحل : نضع : من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1- رسم المنحنيين وتمثيل كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 **على محور الفواصل**

لدينا: $u_1=f(u_0)$ ، $u_2=f(u_1)$ ، $u_3=f(u_2)$



جـ - التخمين : المتتالية متناقصة ومتقاربة

2-ا) إثبات بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -6$

ـ من اجل n = 0 $u_0 \succ -6$ **محققة لأن** $u_0 = 2$

نفرض أن : $u_n \succ -6$ **ونبرهن أن** $u_{n+1} \succ -6$

لدينا فرضا : $u_n \succ -6$ **ومنه** $\frac{1}{2}u_n \succ -3$ **ومنه** $\frac{1}{2}u_n - 3 \succ -6$

أي أن $u_{n+1} \succ -6$

ينتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -6$

ب ـ التحقق من أن (u_n) **متناقصة** :

انه من اجل كل عدد طبيعي n **لدينا**:

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-3-u_n$ **ومنه** $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n-3$

ومنه $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}(u_n+6)$

بما أن : $u_n \succ -6$ فإن $u_n + 6 \succ 0$ ومنه

من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \prec 0$ والمتتالية (u_n) متناقصة

جـ - بما أن المتتالية غير منتهية ومتناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -6

فإنها متقاربة إلي -6

3-ا) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 6$ ومنه

$$v_{n+1} = (\frac{1}{2}u_n - 3) + 6 \quad \text{ومنه} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 6)$$

ينتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

والمتتالية (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0 = u_0 + 6 = 8$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n لدينا :

$$v_n = v_0 . q^n \quad \text{ومنه} \quad v_n = 8.(\frac{1}{2})^n$$

- كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = u_n + 6$ ومنه $u_n = 8(\frac{1}{2})^n - 6$

الاستنتاج: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(8(\frac{1}{2})^n - 6) = -6$ لان $\lim_{n\to+\infty}(8(\frac{1}{2})^n = 0$

جـ - حساب : $A = \sum_{P=0}^{p=9} V_P$

$$A = v_0 + v_1 + \ldots + v_9 \quad \text{ومنه} \quad A = v_0 \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$A = 8.2(1 - (\frac{1}{2})^{10}) \quad \text{ومنه} \quad A = 16(1 - (\frac{1}{2})^{10})$$

$$A = 16(1 - \frac{1}{1024}) \quad \text{ومنه} \quad A = 16(\frac{1023}{1024}) \quad \text{ومنه} \quad \boxed{A = \frac{1023}{64}}$$

حساب : $B = \sum_{P=0}^{p=9} U_P$ لدينا : $u_n = v_n - 6$

ومنه $B = u_0 + u_1 + ... + u_9$ ومنه

$$B = (v_0 - 6) + (v_1 - 6) + ... + (v_9 - 6)$$

$$B = (v_0 + v_1 + ... + v_9) - (6 + 6 + ... + 6)$$

ومنه $B = A - 10(6)$ ومنه $B = \frac{1023}{64} - 60$ ومنه $B = \frac{1023}{64} - \frac{3840}{64}$

$$\boxed{B = \frac{-2817}{64}}$$

د- حساب المجموع : $s_n = \sum_{p=0}^{p=n} v_n$

لدينا : $s_n = v_0 \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ ومنه $\boxed{s_n = 16(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})}$

حساب المجموع: $s'_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_n$ لدينا: $u_n = v_n - 6$ ومنه

$$s'_n = (v_0 - 6) + (v_1 - 6) + ... + (v_n - 6)$$

ومنه $s'_n = s_n - 6(n+1)$ $\boxed{s'_n = 16(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) - 6(n+1)}$

هـ- حساب الجداء: $L = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$ لدينا : $v_n = 8.(\frac{1}{2})^n$ ومنه

$$L = 8(\frac{1}{2})^0 \times 8(\frac{1}{2})^1 \times ... \times 8(\frac{1}{2})^n$$

$$L = (8 \times 8 \times .... \times 8)\left[(\frac{1}{2})^0 \times (\frac{1}{2})^1 \times ... \times (\frac{1}{2})^n\right]$$

$L = (8^{n+1})\left[(\frac{1}{2})^{0+1+2+...+n}\right]$ نعلم أن : $0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ومنه :

$$\boxed{L = (8^{n+1})\left[(\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]}$$

بالتوفيق للجميع س. مهدي