الاستدلال بالتراجع

مسلمة : $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n وَ n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظات :

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n_0 = 0$ ، وَ إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n_0 = 1$ ، وهكذا ...
- يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية .
- في معظم الحالات لإثبات أن متتالية محدودة من الأعلى أو من الأسفل ، نستعمل الاستدلال بالتراجع .

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

الحل : نسمي $p(n)$ الخصية التالية : " $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

- لنتحقق من صحة $p(1)$: من أجل $n=1$ لدينا : $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ منه $p(1)$ محققة .
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

وَ لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا : $1+2+3+\dots+(n+1) = \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{p(n)}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$$1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ومنه $p(n+1)$ صحيحة إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، n^3+2n مضاعف للعدد 3 .

الحل : نسمي $p(n)$ الخصية التالية : " $n^3+2n = 3k$ " مع $k \in \mathbb{N}$.

- لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n=0$ لدينا : $0^3+2(0) = 0$ و 0 من مضاعفات 3 منه $p(0)$ محققة .
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $n^3+2n = 3k$ وَ لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $(n+1)^3+2(n+1) = 3k'$ مع $k' \in \mathbb{N}$

لدينا : $(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+2n+2 = \underbrace{n^3+2n}_{p(n)}+3n^2+3n+3$

منه : $(n+1)^3+2(n+1) = 3k+3n^2+3n+3 = 3\underbrace{(k+n^2+n+1)}_{k'} = 3k'$

ومنه $p(n+1)$ صحيحة ، إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، n^3+2n مضاعف للعدد 3 .

بالتوفيق للجميع، الأستاذ توامي عمر

http://touamimaths.webnode.fr

TouamiMaths