

الأعداد المركبة C (الجزء الأول)

1- الشكل الجبري لعدد مركب : $z = x + iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$.
مع $\operatorname{Re} z = x$ (الجزء الحقيقي) و $\operatorname{Im} z = y$ (الجزء التخيلي)

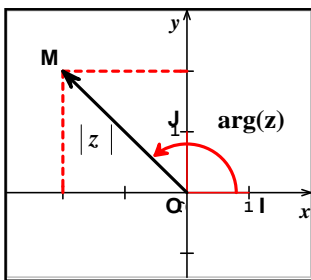
خواص الشكل الجبري :

- ليكن $z, w \in \mathbb{C}$ و $z = x + iy, w = x' + iy'$ و $z < w$ و $z' < w'$:
 ▪ إذا كان $z < w$ فإن $x < x'$ و $y < y'$.
 ▪ إذا كان $z < w$ فإن $x < x'$ و $y < y'$.
 ▪ $z < w$ و $z' < w'$: $z + z' < w + w'$ و $z - z' < w - w'$.
2- مرافق عدد : مرافق $z = x + iy$ هو $\bar{z} = x - iy$.

خواص مرافق عدد مركب : ليكن $z, w \in \mathbb{C}$ و $z = x + iy, w = x' + iy'$ و $z < w$ و $z' < w'$:

- $\bar{\bar{z}} = z$ (مرافق مرافق z هو z).
- $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im} z$ أي : $\bar{z} = x - iy$ و $z = x + iy$.
- $|\operatorname{Im} z|^2 < |\operatorname{Re} z|^2$ أي : $x^2 < y^2$ و إذا كان $z > \bar{z}$ فإن z تخيلي صرف.
- إذا كان $z > \bar{z}$ فإن z حقيقي و إذا كان $z > \bar{z}$ فإن z تخيلي صرف.

مع $z \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$ مع $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ و $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ مع $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z\bar{z}}$ و $\bar{\bar{z}} = z$ و $\bar{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{w}$ و $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.



3- عدد مركب : نسمي $|z|$ طول العدد المركب z حيث : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

خواص الطويلة :

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z\bar{z}| = |z|^2$
- $|z\bar{w}| = |z||w|$
- $|z^n| = |z|^n$ مع $z \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$

4- عمدة عدد مركب غير معدوم : نسمي $\arg z$ عمدة العدد المركب z حيث : $\arg z \in]-\pi, \pi[$.

5- الشكل المثلثي لعدد غير معدوم : الشكل المثلثي للعدد المركب z هو : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg z$.

حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg z$ و $\cos \theta = \frac{x}{r}$ و $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

خواص :

$\arg z \in]-\pi, \pi[$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$ و $\arg z \in]-\pi, \pi[$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$.

و $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ و $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ و $z\bar{z} = r^2$ و $\arg z \in]-\pi, \pi[$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$.

▪ $\arg \frac{1}{z} = -\arg z$ ▪ $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$ ▪ $\arg z \in]-\pi, \pi[$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$.

▪ $\arg z^n = n \arg z$ ▪ $\arg \bar{z} = -\arg z$ ▪ $\arg z \in]-\pi, \pi[$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$.

6- الشكل الأسّي للعدد المركب : الشكل الأسّي للعدد المركب z هو : $z = r e^{i\theta}$ حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg z$.

خواص الشكل المثلثي :

و $z = r e^{i\theta}$ و $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ و $z\bar{z} = r^2$ و $\arg z \in]-\pi, \pi[$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$.

▪ $z^n = r^n e^{in\theta}$ ▪ $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ ▪ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ ▪ $\frac{z}{w} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$ ▪ $z\bar{z} = r r' e^{i(\theta - \theta')}$.

بالتوفيق للجميع، الأستاذ توامي عمر

<http://touamimaths.webnode.fr>