ملخص الأعداد المركبة   إعداد الأستاذ:نعيجة نجم الدين

تعريف : العدد المركب هو كل عدد يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث: $i^2 = -1$ و $(ab) \in \mathbb{R}^2$ ونسمى x الجزء الحقيقي و y الجزء التخيلي ونكتب $\operatorname{Re}(z) = x$ و $\operatorname{Im}(z) = y$

1) الشكل الجبري للعدد المركب هو $z = x + iy$ والشكل المثلثي هو $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ والشكل الأسي هو $z = re^{i\theta}$
حيث: θ هي عمدة العدد المركب z و r طويلته ويرمز لـ θ بـ $\arg(z)$ و r بـ $|z|$

ملاحظة : ليست كل عبارة من الشكل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ كتابة مثلثية للعدد المركب z حتى نتحقق أن $r > 0$ وإذا كان $r < 0$ فإن $-r$ هو طويلة العدد المركب وعمدته $\pi + \theta$ ، ويمكن أن تعطى العبارة بالشكل $r(\sin\theta + i\cos\theta)$ مع $r > 0$ في هذه الحالة تحول العبارة إلى الشكل $z = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

2) للإ نتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي أو الأسي لدينا $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و θ هي الزاوية التي تحقق: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

3) مرافق العد د المركب $z = x + iy$ هو $\overline{z} = x - iy$

4) خواص الطويلة والعمدة لعدد مركب : لدينا $|z| = |-z| = |\overline{z}|$ ، $|z^n| = |z|^n$ ، $|z' \times z| = |z'| \times |z|$ ، $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

$$|z' + z| < \|z'\| + |z| \text{ ، } z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \text{ ، } z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z) \text{ ، } \arg(-z) = \pi + \arg(z) \text{ ، } \arg(\overline{z}) = -\arg(z)$$

$$\arg(z^n) = n\arg(z) \text{ ، } \arg(z'z) = \arg(z') + \arg(z) \text{ ، } \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)$$

5) لكي يكون z عدد حقيقي لابد أن يكون جزءه التخيلي معدوم أي $z - \overline{z} = 0$ ولكي يكون z عدد تخيلي صرف لابد أن يكون جزءه الحقيقي معدوم أي $z + \overline{z} = 0$ وجزءه التخيلي غير معدوم لأن انعدامهما معا يعني أن $z = 0$ وهو عدد حقيقي في هذه الحالة

6) دستور موافر : $(Z)^n = \left(|z| \times e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

7) لتكن النقط A, B, C التي لواحقه على الترتيب هي: z_A, z_B, z_C ، لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$ وطويلة $\overrightarrow{AB}$ هي : $AB = |z_B - z_A|$ نضع $z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ومنه: $\begin{cases} \arg(z) = \left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}\right) \\ |z| = \dfrac{BA}{BC} \end{cases}$

8) تعين نوع المثلث ABC

أ- $z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \pm iy$ أي $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ معناه أن المثلث ABC قائم في B

ب- $|z| = 1$ أي $|z_A - z_B| = |z_C - z_B|$ معناه أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

ج- $z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \pm i$ أي $\begin{cases} \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ |z| = 1 \end{cases}$ معناه أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

د- $\begin{cases} \arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ |z| = 1 \end{cases}$ معناه أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

9) تكون النقط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = k$ حيث: $k \in \mathbb{R}^*$

10) تكون النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة إذا وفقط إذا كان $\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) \times \left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_D - Z_C}\right) \in \mathbb{R}$

11) **تكون** النقط A,B,C,D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز I إذا وفقط إذا كان $|Z_A-Z_I|=|Z_B-Z_I|=|Z_C-Z_I|=|Z_D-Z_I|$

12) نوع الرباعي $ABCD$

أ- لاثبات ان الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $(z_B-z_A=z_C-z_D)$ أو نثبت أن قطراه متناصفان أي أن $\frac{z_C+z_A}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$

ب- لاثبات ان الرباعي $ABCD$ معين يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{DC}\|$ أي أن: $z_B-z_A=z_C-z_D$ و $|z_B-z_A|=|z_C-z_D|$ أو نثبت أن قطراه متناصفان ومتعامدان أي أن $\frac{z_C+z_A}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$

ج- لاثبات ان الرباعي $ABCD$ مستطيل يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ أي أن $z_B-z_A=z_C-z_D$ و $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_B}=iy$ أو نبين أن قطراه متناصفان ومتقايسان أي أن $\frac{z_C+z_A}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ و $|z_C-z_A|=|z_B-z_D|$

د- لاثبات ان الرباعي $ABCD$ مربع يكفي أن نثبت أنه معين به زاوية قائمة أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{DC}\|$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ أو أن قطراه متعامدان ومتناصفان ومتقايسان أي أن $\frac{z_C+z_A}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ و $|z_C-z_A|=|z_B-z_D|$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$

13) مجموعة النقط :

أ$_1$- لإيجاد مجوعة النقط M بحيث $f(z)$ عدد حقيقي صرف نحل المعادلة $\operatorname{Im}(z)=0$ ونستنتج مجموعة النقط التي تحقق المعادلة

أ$_2$- لإيجاد مجوعة النقط M بحيث $f(z)$ عدد تخيلي صرف نحل المعادلة $\operatorname{Re}(z)=0$ ونستنتج مجموعة النقط التي تحقق المعادلة

أ$_3$- لإيجاد مجوعة النقط M بحيث $f(z)$ عدد حقيقي سالب نحل الجملة: $\begin{cases}\operatorname{Re}(z)<0\\ \operatorname{Im}(z)=0\end{cases}$ ونستنتج مجموعة النقط التي تحقق الجملة

أ$_4$- لإيجاد مجوعة النقط M بحيث $f(z)$ عدد حقيقي موجب نحل الجملة: $\begin{cases}\operatorname{Re}(z)>0\\ \operatorname{Im}(z)=0\end{cases}$ ونستنتج مجموعة النقط التي تحقق الجملة

أ$_5$- لإيجاد مجوعة النقط M بحيث $f(z)$ عدد تخيلي سالب نحل الجملة: $\begin{cases}\operatorname{Re}(z)<0\\ \operatorname{Im}(z)=0\end{cases}$ ونستنتج مجموعة النقط التي تحقق الجملة

أ$_6$- لإيجاد مجوعة النقط M بحيث $f(z)$ عدد تخيلي موجب نحل الجملة: $\begin{cases}\operatorname{Re}(z)=0\\ \operatorname{Im}(z)>0\end{cases}$ ونستنتج مجموعة النقط التي تحقق الجملة

ب$_1$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ عدد حقيقيا هي : $(AB)-\{A,B\}$

ب$_2$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ عدد حقيقيا موجب هي : $(AB)-[AB]$

ب$_3$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ عدد حقيقيا سالباهي : $[AB]-\{A,B\}$

ب$_4$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\frac{z_B-z}{z_A-z}=iy$ أو $\left(\arg\frac{z_B-z}{z_A-z}=\frac{\pi}{2}\right)$ هي دائرة قطرها $[AB]$

ج- θ عدد حقيقي و A نقطة حيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\theta+2\pi k$

ج$_1$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\arg(z)=\theta+2k\pi$ هي : $[OA)-\{O\}$

د- θ عدد حقيقي و A و B نقطتان متمايزتان حيث : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})=\theta+2\pi k$

د$_1$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$ هي : $[AB)-\{B\}$

و$_1$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $|z-z_A|=|z-z_B|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

و$_2$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $|z-z_A|=|z_B|=k$ هي دائرة مركزها A ونصف قطرها K

و$_3$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $Z=Z_A+Ke^{i\theta}$ حيث $\theta\in[0,2\pi]$ هي دائرة مركزها A ونصف قطرها K

و$_4$- مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $Z=Z_A+Ke^{i\theta}$ حيث $k\in\mathbb{R}^+$ هي نصف مستقيم مبدأه A وميل هو $\tan g(\theta)$