ملخص في المتتالية العددية

إعداد الأستاذ: نعيجة نجم الدين

✓ **المتتاليات العددية** : هي عبارة عن دوال بسيطة معرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ كمايلي : $u_n = f(n)$

مثال : من أجل كل طبيعي n لدينا : (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$

أو بالعلاقة التراجعية كمايلي : $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1$ و $u_0 = \frac{1}{2}$

✓ **المتالية الحسابية**

نقول عن متتالية أنها متتالية حسابية إذا وفقط تحقق مايلي :

$u_{n+1} - u_n = r$ أو $u_{n+1} = u_n + r$ حيث : $r \in \mathbb{R}$

1- عبارة الحد العام لمتتالية حسابية :

$u_n = u_a + (n-a) \times r$ حيث :

u_a هو الحد الاول للمتتالية الحسابية .

a هو دليل الحد الاول للمتتالية الحسابية .

r هو أساس المتتالية الحسابية .

2- مجموع متالية حسابية

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

عدد الحدود =(دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول) +1

3- الحدود المتعاقبة لمتتالية حسابية

إذا كانت : a, b, c بهذا الترتيب حدود متعاقبة لمتتالية حسابية .

فإن : $a + c = 2b$

✓ **المتتالية الهندسية**

نقول عن متتالية أنها متتالية هندسية إذا وفقط تحقق مايلي :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$ أو $v_{n+1} = v_n \times q$ حيث : $q \in \mathbb{R}$

1- عبارة الحد العام لمتتالية هندسية :

$v_n = v_a \times q^{n-a}$ حيث : q هو أساس المتتالية الهندسية.

2- مجموع متالية هندسية .

$$S_n = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

3- الحدود المتعاقبة لمتتالية هندسية

إذا كانت : a, b, c بهذا الترتيب حدود متعاقبة لمتتالية هندسية .

فإن : $a \times c = b^2$

✓ **المتتالية المحدودة**

نقول عن متتالية انها محدودة من الأعل اذا وفقط اذا كان من من أجل كل عدد طبيعي n $(u_n \le m)$

نقول عن متتالية انها محدودة من الأسفل اذا وفقط اذا كان من من أجل كل عدد طبيعي n: $(u_n \ge m)$

نقول عن متتالية انها محدودة إذا و فقط اذا كان من من أجل كل عدد طبيعي n : $(n \le u_n \le m)$

✓ **تغيرات متتالية عددية**

لدراسة تغيرات متتالية عددية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

إذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n$ اصغر من الصفر فالمتتالية متناقصة

إذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n$ أكبر من الصفر فالمتتالية متزايدة

إذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n$ يساوي الصفر فالمتتالية ثابتة

إذا كانت $u_n \succ 0$ نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1

إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات f على المجال $[0;+\infty[$

وهناك طرق أخرى لدراسة تغيرات متتالية

✓ **تقارب متتالية**

نقول عن متتالية أنها متقاربة إذا كانت $\lim_{n\to\infty} u_n = L$

إذا كانت u_n محدودة من الأعلى $(u_n \le m)$ ومتزايدة فإنها متقاربة

إذا كانت u_n محدودة من **الأسفل** $(u_n \ge m)$ ومتناقصة فإنها متقاربة

✓ **المتتاليتان المتجاورتان**

تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر

✓ **الأستدلال بالتراجع**

للبرهان على صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عنصر n أكبر من أو يساوي n_0 نتبع مرحلتين

1) المرحلة الأولى: ونسميها مرحلة التجريب نتأكد فيها من صحة الخاصية من اجل n_0 أي $p(n_0)$ صحيحة ، وذلك بتعويض n_0 وإجراءالحسابات المباشرة .

2) المرحلة الثانية: وفيها نضع فرضية التراجع التى ننطلق منها لإثبات الخاصية (أي نثبت أن $p(n)$ وراثية):نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n ونثبت صحة الخاصية $p(n+1)$ أي من أجل الرتبة $n+1$.

أنتبه

المرحلة الأول هي مرحلة التجريب أي نتحقق فيها من صحة الخاصية بأصغر عدد طبيعي يفترض أن يحقق الخاصية ، وذلك بتعويض هذا العدد الطبيعي في الخاصية و التأكد بالحساب المباشر من صحة الخاصية وهي عملية ضرورية ولازمة لا يمكن الاستغناء عنها، لأنه يمكن لخاصية خاطئة أن تكون وراثية دون تحقق شرط التجريب .

Naidja Nedjimeddine