بكالوريات 2008
إعداد الأستاذ بواب نورالدين
من كتاب
العملاق في الحوليات

بكالوريا 2008 . الشعبة : علوم تجريبية

تمرين 1 : (4.5 نقط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$

ملاحظة : البرنامج الجديد يقتصر على حل معادلات بمعاملات حقيقية فقط لذلك (يمكن تعديل طرح السؤال الآتي حتى يتماشى مع المنهاج الحالي)

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$

- بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لواحقها على الترتيب 1 ، z_1 و z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ- انطلاقا من : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومن الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية

ب- اكتب Z على الشكل الأسي .

جـ- اكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته ونسبته .

تمرين 2 : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ وَ $C(-1;-2;2)$ و المستوي (p) الذي معادلته : $x+2y-z+7=0$.

1. تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بيّن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$

2. أ- تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

3. لتكن G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,1);(B,\alpha);(C,\beta)\}$ حيث α ، β

عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$.
عيّن α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

تمرين 3 (4 نقط)

① نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

② (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1}=f(u_n)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

③ أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب- عيّن النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 4 (7.5 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث : a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $1cm$.

- عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى المنحني (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $-e$.

II- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

① بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسّر هذه النتيجة بيانيا . (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

② ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

③ بيّن أن المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

④ اكتب معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I .

⑤ ارسم (C_g) .

5) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي :

$H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث : α و β عددان حقيقيان .

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

- استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .

III- لتكن K الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $K(x)=g\left(x^2\right)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغير الدالة K ثم شكل جدول تغيراتها .

الحل

التمرين 1 :

1) حل المعادلة $z^2-(1+2i)z-1+i=0$:

مميز المعادلة هو : $\Delta=1$

حلا المعادلة هما : $z_1=i$ و $z_2=1+i$

• إثبات أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي :

لدينا : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{i}{1+i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ومنه :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2008}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}e^{-i\frac{2008\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}e^{502i\pi}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}$$

إذن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

2) أ- البرهان أن $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$:

$$\frac{1}{e^{i\theta}}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\times\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{-i\theta}$$

طريقة أخرى : من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$ نستنتج أن :

$e^{i\theta}\times e^{-i\theta}=e^{i(\theta-\theta)}=e^{i(0)}=1$ ومنه : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$

• البرهان أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

ب- كتابة Z على الشكل الأسي :

$$Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{1+i-1}{i-1}=\frac{i}{-1+i}\times\frac{-1-i}{-1-i}=-\frac{1}{2}i(1+i)=-\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\times\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

جـ- كتابة Z على الشكل المثلثي :

$$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

• استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر :

تذكير : التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ ، نسبته k $(k>0)$ وزاويته θ هو تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$$z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$$

لدينا : $\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه : $z_2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_1-1)$

نستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

التمرين 2 :

(1) التحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية :

تذكير : • النقط A ، B و C ليست على استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا (أي : الشعاعان مستقلان خطيا) .

• $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي k حيث : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$ وبالتالي لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$. نستنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلان خطيا .

إذن : النقط A ، B و C ليست على استقامية .

• إثبات أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$:

يكفي التحقق أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق المعادلة المعطاة .

$A\in(ABC)$ لأن $0+2\times1-2=2-2=0$

$B\in(ABC)$ لأن $2+2\times0-2=2-2=0$

$C\in(ABC)$ لأن $-2+2\times2-2=4-4=0$

إذن : المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$

طريقة أخرى : يمكن البحث عن معادلة المستوي (ABC) وذلك بعد تعيين إحداثيات الشعاع الناظمي له .

2 أ- التحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان :

$\vec{n_1}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\vec{n_2}(0;1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

لدينا : $\vec{n_1}.\vec{n_2}=1\times0+2\times1-1\times2=0$ ومنه : $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

إذن : المستويان (P) و (ABC) متعامدان .

• تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

- يكون الشعاع $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان عموديا على كل من الشعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$.

لدينا : $\vec{u}.\vec{n_1}=a\times1+b\times2+c\times(-1)=0$

ولدينا : $\vec{u}.\vec{n_2}=a\times0+b\times1+c\times2=0$

وبحل الجملة : $\begin{cases} a+2b-c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$ مع فرض $c=1$ نحصل على $\vec{u}(5;-2;1)$

إذن : $\vec{u}(5;-2;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

- النقطة C تنتمي إلى (Δ) لأن إحداثياتها تحقق معادلة (P) وتحقق معادلة(ABC)

- تكون$M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x=x_C+at \\ y=y_C+bt \\ z=z_C+ct \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2-2t \\ z=2+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

طريقة أخرى : المستقيم (Δ) معرف بالجملة $\begin{cases} y+2z-2=0 \\ x+2y-z+7=0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} y=-2z+2 \\ x+2(-2z+2)-z+7=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} x=5z-11 \\ y=-2z+2 \end{cases}$

وبفرض $z=2+t$ نحصل على الجملة : $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2-2t \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=2+t \end{cases}$

ملاحظة : بوضع $z=t$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=-11+5t \\ y=2-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

ب- حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) :

نعلم أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان وأن (Δ) مستقيم تقاطعهما وبالتالي فإن المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي المسافة بين النقطة A والمستوي (P)

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

ومنه : $d(A;(P))=\dfrac{|2+2\times0-1+7|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{8}{\sqrt6}=\dfrac{4\sqrt6}{3}$

3 تعيين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) :

تذكير : إذا كانت $G(x_G;y_G;z_G)$ مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

فإن : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

ومنه : $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ، $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

و $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

وبالتالي : $x_G=\dfrac{x_A+\alpha x_B+\beta x_C}{1+\alpha+\beta}=\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}$

$$y_G=\frac{y_A+\alpha y_B+\beta y_C}{1+\alpha+\beta}=\frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}$$

$$z_G=\frac{z_A+\alpha\, z_B+\beta\, z_C}{1+\alpha+\beta}=\frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}$$

تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كانت G نقطة من المستوي (P)

وعليه يكون : $x_G+2y_G-z_G+7=0$ وبعد التعويض والتبسيط نجد : $\alpha=-\frac{4}{7}$

إذن : تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) من أجل $\alpha=-\frac{4}{7}$

التمرين 3 :

1 أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على I :

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{4\}$ ، $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}$

وبالتالي : من أجل كل x من المجال I ، $f'(x)>0$

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال I

ب- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad$ 2
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow 2$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

طريقة أخرى : من $1\le x\le 2$ وَ f متزايدة تماما على I

نستنتج أن : $f(1)\le f(x)\le f(2)$ أي : $1\le f(x)\le 2$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

2 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I :

نسمي p_n الخاصية " $u_n\in I$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 \in I$ أي : $\frac{3}{2} \in I$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \in I$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} \in I$

من السؤال (1) الفرع (ب) وجدنا أنه من أجل كل x من I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

ومن فرضية التراجع : $u_n \in I$ نستنتج أن : $f(u_n) \in I$ أي : $u_{n+1} \in I$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

تذكير : (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$

(u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \leq u_{n+1}$

(u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \geq u_{n+1}$

(u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = u_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+2}{-u_n+4} - u_n = \frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$

وبما أن : u_n ينتمي إلى I أي : $1 \leq u_n \leq 2$ نستنتج أن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على المجال I .

• تقارب المتتالية (u_n) :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال (2) الفرع (أ) وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I

أي : $1 \leq u_n \leq 2$ نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة (محدودة من الأسفل) .

ومن السؤال (2) الفرع (ب) وجدنا أن المتتالية (u_n) متناقصة على المجال I .

إذن : المتتالية (u_n) متقاربة (متناقصة ومحدودة من الأسفل).

3 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ "

• التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو : $u_0=\frac{3}{2}$. الطرف الثاني هو : $1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

لدينا : $u_{n+1}=f\left(u_n\right)=\frac{u_n+2}{-u_n+4}$ ومن فرضية التراجع $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

و بتعويض u_n بـ $1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ في العبارة $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{-u_n+4}$ نجد بعد

التبسيط $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$ ومنه : p_{n+1} صحيحة

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب- تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير : إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$

نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}=0$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

التمرين 4 :

I- تعيين قيمتي a و b :

النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى المنحنى $\left(C_f\right)$ معناه : $f(-1)=1$

معامل توجيه المماس عند A يساوي $-e$ معناه : $f'(-1)=-e$

لدينا : $f(-1)=1$ ومنه : $(-a+b)e+1=1$ وبالتالي : $a=b$

ولدينا : $f'(-1)=-e$ حيث : $f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$

ومنه : $a-(-a+b)=-1$ نستنتج أن : $a=b=-1$

وعليه : $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

II- ① تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$:

لدينا : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1=-xe^{-x}-e^{-x}+1$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$ لأن : $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x})=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0-0+1=1$

• تفسير هذه النتيجة بيانيا :

المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_g) عند $+\infty$.

② دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

- المشتقة : $g'(x)=x\,e^{-x}$

- إشارة المشتقة : $[\,g'(x)=0\,]$ يكافئ $[\,x=0\,]$ ومنه : $g(0)=0$

$[\,g'(x)>0\,]$ يكافئ $[\,x>0\,]$ وَ $[\,g'(x)<0\,]$ يكافئ $[\,x<0\,]$

وبالتالي : الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+e^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

③ تبيان أن المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف I :

تذكير : إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 وإذا انعدمت دالتها المشتقة الثانية من أجل x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0\,;g(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة g .

لدينا : $g'(x)=x\,e^{-x}$ ومنه : $g''(x)=(1-x)e^{-x}$

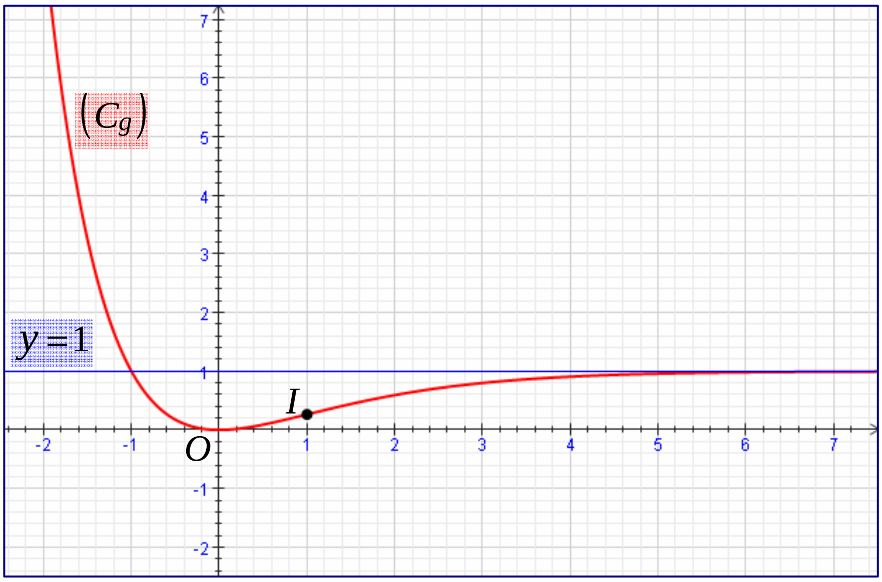
الدالة g'' تنعدم من أجل $x_0=1$ مغيرة إشارتها نستنتج أن النقطة $I(1;g(1))$

أي : $I\left(1;1-2e^{-1}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_g) .

④ كتابة معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I:

معادلة المماس في النقطة I هي : $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$

⑤ رسم المنحني (C_g) :



⑥ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$:

H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$ معناه : $H'(x)=g(x)-1$

ومنه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

وبالمطابقة نستنتج أن : $\alpha=1$ و $\beta=2$ وعليه : $H(x)=(x+2)e^{-x}$

• استنتاج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 :

لدينا : $H'(x)=g(x)-1$ ومنه : $g(x)=H'(x)+1$

وبالتالي فإن مجموعة الدوال الأصلية للدالة g هي الدوال L من الشكل :

$L(x)=H(x)+x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$ وبما أن : $L(0)=0$ نستنتج أن : $c=-2$

إذن : $L(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$

III- تعيين اتجاه تغير الدالة K: تذكير : $(u\circ v)'(x)=u'[v(x)]\times v'(x)$

وعليه : $K'(x)=g'(x^2)\times(x^2)'=2x^3e^{-x^2}$ (إشارة $K'(x)$ هي إشارة x)

جدول تغيرات الدالة K :

x	-2 0 $+\infty$
$K'(x)$	$-$ 0 $+$
$K(x)$	$1-5e^{-4}$ ↘ 0 ↗ 1

الموضوع الثاني

تمرين 1 : (3 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك .

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $x-3z-4=0$.

1 المستوي (P) هو :

أ) (BCD) ب) (ABC) جـ) (ABD)

2 شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

أ) $\vec{n_1}(1;2;1)$ ب) $\vec{n_2}(-2;0;6)$ جـ) $\vec{n_3}(2;0;-1)$

3 المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي :

أ) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ب) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ جـ) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

تمرين 2 : (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1 أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والمنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

③ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 3 : (5 نقاط)

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$ (يمكن تعديل طرح السؤال حتى يتماشى مع المنهاج)

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$ على الترتيب . عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

③ لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C = \dfrac{4 - i}{1 + i}$

- اكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

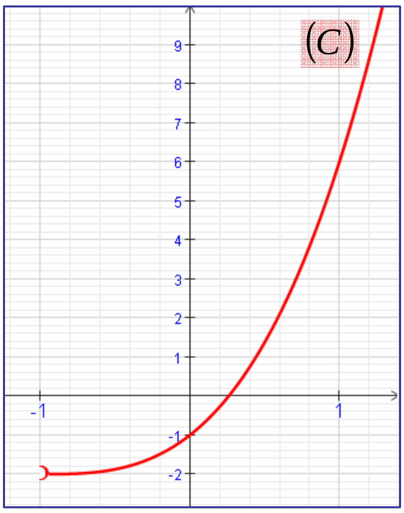
④ أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$، نسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي :

$$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$$

ب- تطبيق : عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ :

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$$

تمرين 4 : (7 نقاط)



المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

① أ- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال

$\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

② f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب- عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا .

جـ- احسب : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا .

د- شكل جدول تغيرات الدالة f .

③ نأخذ $\alpha\approx 0.26$.

أ- عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب- ارسم المنحنى (Γ) .

④ أ- اكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

ب- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=2$