مسالة في الدوال العددية خاصة بجميع الشعب
الكفاءات المستهدفة
الاستمرارية الاشتقاق دراسة المماس مبرهنة القيم المتوسطة

مسألة (04) لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول : $2cm$).

الجزء A : لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-3x-4$

1) شكل جدول تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]2;\dfrac{7}{3}\right[$ و يحقق: $g(\alpha)=0$ ، ثم عيّن قيمة تقريبية له بتقريب 10^{-2} .

3) ادرس إشارة g على $\mathbb{R}$

الجزء B : 1) اوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات للدالة f عند أطراف D_f.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

ب - استنتج جدول تغيرات الدالة f

3) أ-أوجد ثلاثة أعداد حقيقية c و b ، a بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من D_f تكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=a.x+b+\dfrac{x+c}{x^2-1}$

ب- أستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار كل من $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلته .

ج) ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ)

د) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^2+10\alpha+8}{2\alpha+4}$. ثم احسب قيمة تقريبية لــ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2}

هــ) أنشئ المنحني (C) و المستقيم (Δ) .

الجزء C : 1) عيّن فواصل النقط من المنحني (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم الذي معادلته: $y=x+2$

2) عين معادلة لكل مماس ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

الحل

الجزء A

1/تشكيل جدول تغيرات ل g حيث $g(x)=x^3-3x-4$

الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $g'(x)=3x^2-3$

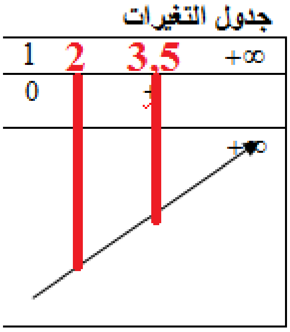
اشارة المشتقة: $g'(x)=0$ يعني ان $3x^2-3=0$ أي $x=\pm\sqrt{1}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2-	↘	6-	↗	$+\infty$

لاحظ ان $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

2/ أثبات أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $[2;7/3]$ ويحقق $g(x)=0$ وتعيين قيمة تقريبية ل α بتقريب 10^{-2}



لدينا $g(x)=x^3-3x-4$

الدالة g مستمرة على المجال $[2;7/3]$ لانها مستمرة على $]1;+\infty[$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[2;7/3]$ فهي رتيبة على هذا المجال

لدينا $g(2)=2^3-3(2)-4=-2$

لدينا $g(2,3)=2.3^3-3(2.3)-4=1.3$

اذن $g(2)\times g(2.3)\prec 0$ شروط مبرهنة القيم المتوسطة محققة المعادلة تقبل حل وحيد

ايجاد الحل بقيمة تقريبية عن طريق التنصيف

بفرض $x_3\in[2;7/3]$ حيث $x_3=-(2+7/3)/2=2.15$ و $g(2,15)=2.15^3-3(2.15)-4=-0.5$

$g(2,15)\times g(2,3)\prec 0$ ومنه يصبح $x_4\in[2.15;7/3]$ أي $x_4=2,225$ ومنه $g(2,225)=2.225^3-3(2.225)-4=0.3$

$g(2,15)\times g(2,225)\prec 0$ ومنه يصبح $x_5\in[2.15;2,225]$

أي $x_5=2,1875$ ومنه $g(2,1875)=2.1875^3-3(2.1875)-4=-0.1$

$g(2,1875)\times g(2,225)\prec 0$ ومنه يصبح $x_6\in[2.1875;2,225]$ اي $x_6=2,205$ ومنه

$g(2,205)=2.1875^3-3(2.205)-4=0.1$

$g(2,1875)\times g(2,205)\prec 0$ ومنه يصبح $x_7\in[2.1875;2,205]$ اي $x_6=2,19625$ ومنه

$g(2,19625)=2.19625^3-3(2.19625)-4=0.0$

اذن $\alpha=2,19625$ القيمة التقريبية هي $\alpha=2,20$

3/دراسة اشارة الدالة g على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات يوضح ان

لما $x\in]\alpha;+\infty[$ فان $g(x)\succ 0$

لما $x\in]-\infty;\alpha[$ فان $g(x)\prec 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1	α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗ سالب	2-	↘ سالب	6- سالب	↗	موجبة	$+\infty$

لاحظ ان $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim$ ... و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

الجزء B

مجموعة التعريف تعطى دائما اذن $D_f=\{x\in]-\infty;1-[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[\}$

النهايات لدينا $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=+\infty$

2)-ا) اثبات انه من اجل كل $x\in D_f$ فان $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f و $f'(x)=\dfrac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}..(1)$

و $(2)..\ f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}$ محققة لان $(1)=(2)$

اشارة $xg(x)$:

جدول الاشارة: وجدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		1		2.18		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
الاشارة		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4.5	↗	$+\infty$