مسالة في الدوال المثلثية خاصة بشعبة الرياضيات

الكفاءات المستهدفة

الاستمرارية الاشتقاق دراسة الشفعية نقطة الانعطاف المماس مبرهنة القيم المتوسطة

المسألة :

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$f(0)=0,\ x\in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ إذا كان $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

1/ أثبت أن الدالة f مستمرة عند القيمة 0

2/ أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة 0

3/ بين أن الدالة f فردية ثم أدرس تغيراتها

4/نسمي (Γ) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أثبت أن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة انعطاف للمنحنى (Γ)

5/ عين إحداثيتي النقطة A التي يكون فيها المماس لـ (Γ) موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$

6/لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;\pi[$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

أثبت أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث : $\dfrac{5\pi}{6}>\alpha>\dfrac{3\pi}{6}$

ثم أول النتيجة هندسيا

7/ أرسم المنحنى (Γ) مستعملا النتائج السابقة

yousfi abdou

الحل

1/ أثبات أن الدالة f مستمرة عند القيمة 0

لاحظ ان $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/\sin x$ ح ع ت ومنه $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)(1+\cos x)/(\sin x)(1+\cos x)$ ضرب في مرافق مقام

ومنه $\lim_{x\to 0}(1-\cos^2 x)/(\sin x)(1+\cos x)$ أي $\lim_{x\to 0}(\sin^2 x)/(\sin x)(1+\cos x)$ لان $\sin^2+\cos^2 x=1$

وبالتالي $\lim_{x\to 0}(\sin x)/(1+\cos x)=0$ أي $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

وكذلك بما ان $f(0)=0$ فان الدالة f مستمرة عند 0

2/ أثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة 0

العدد المشتق عند ال 0 هو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/\sin^2 x$ الدالة تقبل الاشتقاق عند ال 0

$$=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/(1-\cos^2 x)=\lim_{x\to 0}1/(1+\cos x)=1/2$$

3/ بيان أن الدالة f فردية ثم أدرس تغيراتها

1-من اجل كل $x\in D_f$, يوجد $-x\in D_f$ محقق لان $D_f=]-\pi;0[\cup]0;\pi[$

2- $f(-x)=(1-\cos(-x))/\sin(-x)$

$=(1-\cos x)/-\sin(x)$

$=-[(1-\cos x)/\sin(x)]$

$=-f(x)$

علاقات مثلثية $\cos(-x)=\cos x$ ، $\sin(-x)=-\sin x$ نستنتج ان الدالة فردية

دراسة تغيرات الدالة

الدالة f معرفة على $x\in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=(1-\cos x)/\sin^2 x=1/(1+\cos x)$

اشارة المشتقة $f'(x)=0$ يعني ان المشتقة لاتنعدم وهي موجبة دوما

جدول التغيرات

x	$-\pi$		π
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

لاحظ ان

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-\pi} f(x)=\lim_{x\to-\pi}(1-\cos x)/\sin x=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\frac{1-(-1)}{y}=-\infty$$ و

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}(1-\cos x)/\sin x=\lim_{y\to 0}\frac{1-(-1)}{y}=+\infty$$

4/أثبات أن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة انعطاف للمنحنى (Γ)

تعريف نقطة الأنعطاف

f دالة عددية معرفة على D_f وقابلة للأشتقاق مرتين على الأقل على D_f.

المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 اذا وفقط اذا كان.

إذا انعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها عند قيمة x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف $A(x_0;f(x_0))$.

الدالة f معرفة على $x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=1/(1+\cos x)$

الدالة f' معرفة على $x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ ودالتها المشتقة هي $f''(x)=\sin x/(1+\cos x)^2$

$f''(x)=0$ يعني ان $\sin x=0.....(1)$ ومنه $x=0$

وبالتالي النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة انعطاف للمنحنى (Γ)

5/ إحداثيتي النقطة A التي يكون فيها المماس لـ (Γ) موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$

معامل توجيه المماس هو 1 لانه يوازي $y=x$ ومنه نستنتج ان $f'(x)=1$

اذن $(1-\cos x)/\sin^2 x=1$ بما ان $\sin^2+\cos^2 x=1$

يصبح لنا $1-\cos x=1-\cos^2 x$ ومنه $\cos x=1$ أي $x=0$ و $f(0)=0$ النقطة $A(0;0)$

6/لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;\pi[$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

أثبات أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث : $\frac{5\pi}{6}>\alpha>\frac{3\pi}{4}$

$g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{5\pi}{6}=2.2$ و $g\left(\frac{3\pi}{6}\right)=f\left(\frac{3\pi}{6}\right)-\frac{3\pi}{6}=-0.5$

الدالة مستمرة على المجال $]0;\pi[$ لانها فرق دالتين مستمرتين x و $f(x)$ و $\left[\frac{3\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ محتوى في المجال $]0;\pi[$

في هذه الحالة يوجد حل على الاقل للمعادلة : $g(x)=0$

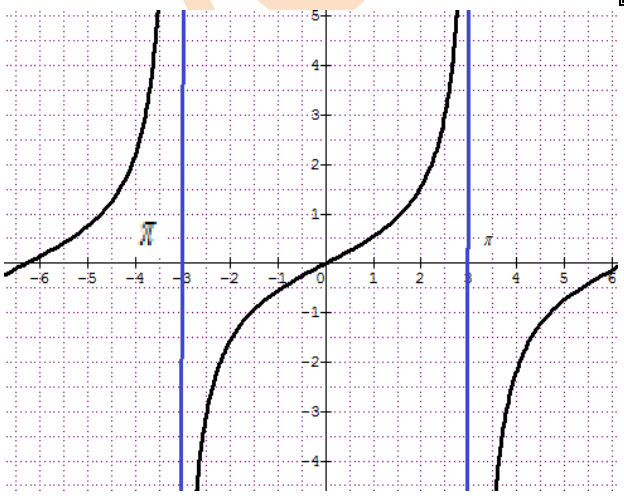
الرتابة"

المشتقة: الدالة g تقبل الاشتقاق $g'(x)=f'(x)-1$ أي $g'(x)=1/(1+\cos x)-1$

ومنه $g'(x)=-\cos x/(1+\cos x)$

اشارة المشتقة $g'(x)=0$ يعني ان $\cos x=0$ أي $x=\frac{\pi}{2};x=-\frac{\pi}{2}$

ومنه $\left[\frac{3\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ محتوى في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ الاشارة فيه موجبة يعني الدالة متزايدة تماما

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث : $\frac{5\pi}{6}>\alpha>\frac{3\pi}{6}$