



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة / ثانوية الحرية

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : ساعة

فرض في مادة : الرياضيات

التمرين :

(I) g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2x^3 + 9x + 24$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .

بقراءة بيانية :

(أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-2)$.

(ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-2; -1[$

بحيث $g(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن: $-1,70 < \alpha < -1,60$

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{-x^3 - 6}{2x^2 + 3}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(2x^2 + 3)^2}$.

(ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[-\alpha; +\infty[$ و متزايدة تماما

على المجال $[0; -\alpha]$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) (أ) بين أن: $f(x) + \frac{x}{2} = \frac{3x - 12}{2(2x^2 + 3)}$ ، ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) .

(ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) إلى المستقيم (Δ) .

(4) نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0 حيث: $-1,82 < x_0 < -1,81$

- ارسم بعناية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) . (نأخذ $f(-\alpha) \approx f(1,75) \approx -1,2$)

(5) h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $h(x) = f(|x|)$. و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(أ) بيّن أن h دالة زوجية .

(ب) لاحظ أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^+$ لدينا : $h(x) = f(x)$. استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

حل التمرين :

-الإشارة : $g(-1) > 0$, $g(-2) < 0$ (من البيان و ليس حسابيا)

-الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-2; -1[$

و لدينا $g(-2) \times g(-1) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α حيث $\alpha \in]-2; -1[$

-التحقق أن $-1,70 < \alpha < -1,60$:

$$\begin{cases} g(-1,70) = -1,126 \\ g(-1,60) = 1,408 \end{cases} \Leftrightarrow g(-1,70) \times g(-1,60) < 0$$

لدينا :

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,70 < \alpha < -1,60$

-إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

$$g(x) : \begin{array}{c} -\infty \quad - \quad \alpha \quad + \quad +\infty \\ \hline 0 \end{array}$$

-حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 6}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 6}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

-المشتقة :

الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{-3x^2(2x^2 + 3) - 4x(-x^3 - 6)}{(2x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^4 - 9x^2 + 24x}{(2x^2 + 3)^2} = \frac{x(-2x^3 - 9x + 24)}{(2x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2(-x)^3 + 9(-x) + 24)}{(2x^2 + 3)^2} = \frac{x.g(-x)}{(2x^2 + 3)^2}$$

-اتجاه تغير الدالة f : إشارة المشتقة من إشارة $x.g(-x)$.

أولا نعين إشارة $g(-x)$:

إذا كان $-x \leq \alpha$ فإن $g(-x) \leq 0$ و منه : إذا كان $x \geq -\alpha$ فإن $g(-x) \leq 0$

إذا كان $-x \geq \alpha$ فإن $g(-x) \geq 0$ و منه : إذا كان $x \leq -\alpha$ فإن $g(-x) \geq 0$

$$g(-x) : \begin{array}{c} -\infty \quad + \quad -\alpha \quad - \quad +\infty \\ \hline 0 \end{array}$$

و منه إشارة المشتقة هي :

	$-\infty$	0	$-\alpha$	$+\infty$
x	-	0	+	+
$g(-x)$	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0

و منه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $]-\alpha; +\infty[$ و متزايدة تماما على $[0; -\alpha]$

- جدول تغيرات الدالة f :

	$-\infty$	0	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	-2	$f(-\alpha)$	$-\infty$

$$f(0) = \frac{-(0)^3 - 6}{2(0)^2 + 3} = -2$$

- التبیین :

$$f(x) + \frac{x}{2} = \frac{-x^3 - 6}{2x^2 + 3} + \frac{x}{2} = \frac{2(-x^3 - 6) + x(2x^2 + 3)}{2(2x^2 + 3)} = \frac{-12 + 3x}{2(2x^2 + 3)}$$

- المستقيم المقارب المائل :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{x}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-12 + 3x}{2(2x^2 + 3)} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x}{4x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3}{4x} \right] = 0$$

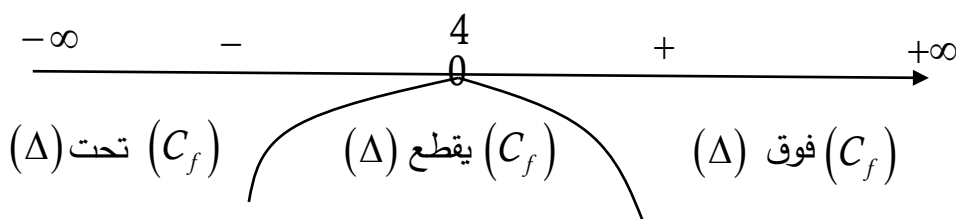
إذن : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = -\frac{x}{2}$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

- الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

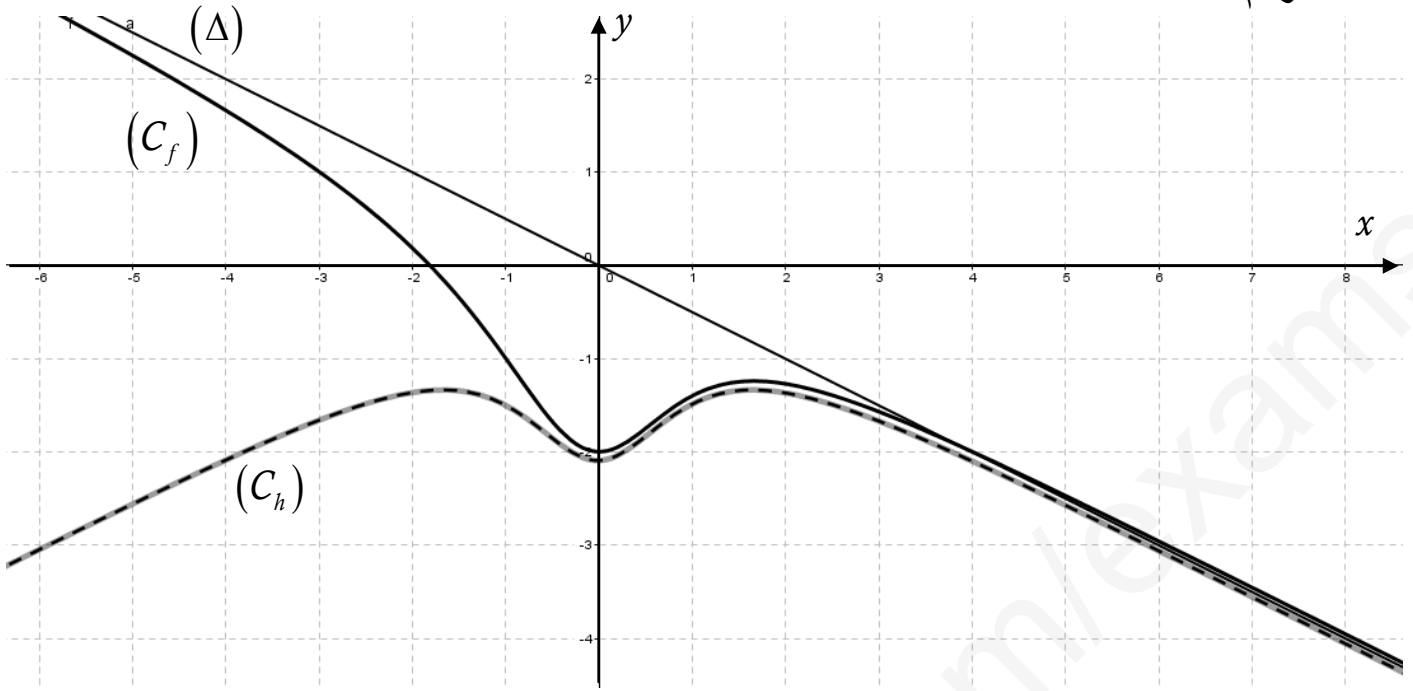
$$f(x) - y_\Delta = \frac{-12 + 3x}{2(2x^2 + 3)}$$

ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Leftrightarrow -12 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$



-الرسم :



-التبيين أن الدالة h زوجية :

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $-x \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} متناظر بالنسبة إلى الصفر)

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه h دالة زوجية

-كيفية رسم المنحنى (Γ) الممثل للدالة h :

لما $x \in \mathbb{R}^+$ ($x \geq 0$) المنحنى (Γ) منطبق على المنحنى (C_f) .

لما $x \in \mathbb{R}^-$ ($x \leq 0$) المنحنى (Γ) متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن الدالة h زوجية .

-رسم المنحنى (Γ) انطلاقاً من (C_f) :

الرسم في نفس المعلم السابق (المنحنى الممثل بنقاط متقطعة)