

## سلسلة تعاريف المتتاليات العددية الواردة في البكالوريا

من 2008 إلى 2018 [شعبة تسيير و إقتصاد]

جمع و إعداد الأستاذ : مجاهدة خالو

السنة الدراسية : 2018 / 2019

### التمرين الأول [باك 2008] [م1] (ن4)

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي :}$$

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة  $\alpha = -\frac{8}{3}$  تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة.

(2) في كل مايلي :  $\alpha = 2$  ، ونعرف المتتالية العددية  $(v_n)$  كمايلي :  $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ- أحسب  $u_1, u_2$  .

ب- أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$  .

ج- أكتب عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  . وأحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

### التمرين الثاني [باك 2008] [م2] (ن5)

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$  .

(1) أحسب  $u_1, u_2, u_3$  .

(2) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq -2$  .

ب- جد اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  . ماذا تستنتج ؟

(3)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كمايلي :  $v_n = u_n + 2$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية .

ب- عبر بدلالة  $n$  عن الحد العام  $v_n$  ثم  $u_n$  .

ج- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د- أحسب ، بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

### التمرين الثالث [باك 2009] [م1] (ن4)

(1) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $3u_{n+1} = u_n + 4$  .

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، يكون  $u_n \leq 2$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

ج- إستنتج مع التبرير أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 2$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها .

ب- أكتب الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

**التحريث الرابع [باك 2009] [م2] (ن5)**

(1)  $u_n$  متتالية عددية معرفة بـ:  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  .  
أحسب  $u_2, u_1$  .

(2) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ:  $v_n = u_n - 1$  .

أ- أثبت أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$  .  
ب- أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(4) عين العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون :  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = n - 79$  .

**التحريث الخامس [باك 2010] [م1] (ن4)**

(1)  $n$  عدد طبيعي، أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = 1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^n$  .  
( $S_n$  مجموع حدود متتالية هندسية أساسها  $e$  وحدها الأول 1 ، و  $e$  يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

(2) لتكن المتتالية العددية  $(w_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $w_n = 2n + 4 + e^n$  .

بين أن:  $w_n = u_n + v_n$

حيث  $(u_n)$  متتالية حسابية و  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.  
(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :

$$4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$$

(4) استنتج المجموع  $S$  بدلالة  $n$  حيث :  $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

**التحريث السادس [باك 2010] [م2] (ن6)**

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$  .

(1) أحسب  $u_2, u_1$  و  $u_3$  .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n < 2$  .  
ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

ج- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - 2$  .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$  .

ج- ماهي نهاية المتتالية  $(u_n)$  ؟

(4) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$

### التعريف السابع [باك 2011] [م2] (5.5ن)

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  حيث:  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$  .  
(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > \frac{1}{3}$  .

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(4) لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n - \frac{1}{3}$  .

أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

بـ اكتب كلا من  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  .

جـ احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

### التعريف الثامن [باك 2012] [م1] (5ن)

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$  .

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > \frac{2}{3}$  .  
بـ بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$  .

أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

بـ اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$  .

جـ ماهي نهاية المتتالية  $(u_n)$  ؟

(3) أحسب، بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

### التعريف التاسع [باك 2012] [م2] (5ن)

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والإحتياط .  
يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا .

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد) .

يرمز  $u_n$  إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة  $2008 + n$  .

(1) أـ احسب كلا من  $u_0, u_1, u_2$  .

بـ هل المتتالية  $(u_n)$  هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برز إجابتك .

جـ بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا ،  $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$  .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n - 100000$  .

أبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

بـ اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$  .

(3) أـ ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

بـ ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

**التعريف العاشر [باك 2013] [م1] (5ن)**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث  $a$  وسيط حقيقي.

(1) عين قيمة  $a$  من أجلها تكون المتتالية ( $u_n$ ) ثابتة.

(2) نفرض  $a \neq \frac{5}{2}$ . عين قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) حسابية، ثم أحسب عندئذ  $u_n$  ومجموع  $n$  حدا الأولى من المتتالية.

(3) عين قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) هندسية، ثم عين في هذه الحالة كلا من  $u_{50}$  ومجموع 50 حدا الأولى منها.

(4) نفرض  $a=4$ . برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، فإن:  $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بين أن:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

**التعريف الحادي عشر [باك 2013] [م2] (4ن)**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$ .

(1) أـ أحسب الحدود:  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$ .

بـ هل المتتالية ( $u_n$ ) رتيبة على  $\mathbb{N}$ ؟ برز إجابتك.

(2) أـ بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$ .

بـ استنتج أن المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = u_n - 4$  هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

جـ أكتب  $v_n$ ، ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ .

دـ بين أن ( $u_n$ ) متقاربة.

(3) باستعمال عبارة  $u_n$ ، تأكد ثنائية من نتيجة السؤال (1) بـ.

**التعريف الثاني عشر [باك 2014] [م2] (4.5ن)**

المتتالية العددية ( $u_n$ ) معرفة كما يلي:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ .

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n > -3$ .

بـ بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة تماماً.

جـ استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متقاربة.

(2) لتكن ( $v_n$ ) متتالية هندسية متقاربة أساسها  $q$  حيث:  $v_0 = 6$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 18$ .

$$\text{أـ بين أن: } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$$

بـ أحسب الأساس  $q$  ثم عين عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$ .

جـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = v_n - 3$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

**التمرين الثالث عشر [باك 2015] [م2] (ن6)**

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا .  
علما أن سنة 2008 كان عدد العمال 50000 .

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ :  $u_n$  لعدد العمال سنة  $2012 + n$  أي  $u_0 = 50$  .  
يرمز إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة  $2008 + n$  .  
(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  ليست حسابية وليست هندسية .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 60 - u_n$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- قدر عدد العمال سنة 2017 .

د- حدد اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

هـ- أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

**التمرين الرابع عشر [باك 2016] [م1] (ن4.5)**

$(v_n)$  متتالية هندسية حدودها موجبة ومعروفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $v_0 = 18$  والعلاقة :  $v_0 + v_1 + v_2 = 38$  .

(1) بين أن أساس المتتالية  $(v_n)$  هو  $q = \frac{2}{3}$  .

(2) أ- أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$  .

ج- أحسب نهاية  $(v_n)$  .

(3) نضع :  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$  .

أ- أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج نهاية  $S_n$  عندما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$  .

ب- جد العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $S_n = \frac{3510}{81}$  .

**التمرين الخامس عشر [باك 2016] [م2] (ن5)**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 5$  و  $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$  .

(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية  $(u_n)$  ؟

(3) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = u_n - 1$  .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية معيننا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$  .

ج- أحسب نهاية  $(u_n)$  .

**التمرين السادس عشر [باك 2017] [م1] (4ن)**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  .

(1) أـ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 3$  .

بـ بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) ( $v_n$ ) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 3 - u_n$  .

أـ بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  ، ثم عين حدّها الأول .

بـ نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

بين أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$  .

**التمرين السابع عشر [باك 2017] [م2] (4ن)**

لتكن ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  .

(1) أحسب  $u_1, u_2, u_3$  ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) .

(2) نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_{n+1} - u_n$  .

أـ بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدّها الأول .

بـ عين  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ،  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$  .

أـ أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  .

بـ بين أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = S_n + u_0$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

**التمرين الثامن عشر [باك 2018] [م1] (4ن)**

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان ( $u_n$ ) و ( $v_n$ ) المعرفتان كما يلي :

$$u_0 = 50 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 0,7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

(1) برهن أن ( $v_n$ ) هندسية أساسها 0,7 يطلب تعيين حدّها الأول  $v_0$  ، وكتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(2) أـ أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $u_n$  .

بـ عين اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المتة هي الوحدة ، ونرمز بـ  $u_n$  لعدد المشتركين سنة  $2016 + n$  أي  $u_0 = 50$  .

(1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

(2) أـ برز العبارة :  $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$  .

بـ ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

**التمرين التاسع عشر [باك 2018] [م2] (4ن)**

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2u_{n+1} = u_n + 6$  .

(1) أـ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 6$  .

بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) واستنتج أنها متقاربة .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 6$  .

أـ بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  ، يطلب تعيين حدّها الأول  $v_0$  .

بـ أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(3) أحسب بدلالة  $n$  ما يلي :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times u_n$  .