منتديات طموحنا التعليمية

طريقك نحو التفوق

www.tomohna.com

روابط سريعة للأقسام التعليمية

التعليم المتوسط	التعليم الثانوي	التحضير للبكالوريا
قسم السنة الأولى متوسط	السنة الأولى ثانوي	قسم التحضير العام لشهادة البكالوريا
قسم السنة الثانية متوسط	السنة الثانية ثانوي	قسم الشعب العلمية للسنة الثالثة ثانوي • الرياضيات للسنة الثالثة ثانوي شعب علمية • الفيزياء و الكيمياء للسنة الثالثة ثانوي شعب علمية • العلوم الطبيعية للسنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية و الرياضيات • التكنولوجيا للسنة الثالثة ثانوي تقنى رياضي
قسم السنة الثالثة متوسط	السنة الثالثة ثانوي	قسم الشعب الأدبية للسنة الثالثة ثانوي • اللغة العربية للسنة الثالثة ثانوي اداب • الفلسفة للسنة الثالثة ثانوي آداب

		● التاريخ والجغرافيا للسنة الثالثة ثانوى آداب ● اللغة الفرنسية للسنة الثالثة ثانوى آداب ● اللغة الانجليزية للسنة الثالثة ثانوى آداب ● اللغة الاسبانية و الألمانية للسنة الثالثة ثانوى آداب ولغات أجنبية العلوم الإسلامية للسنة الثالثة ثانوي
قسم السنة الرابعة متوسط	المـواد العلمية والتقنية المـواد الأدبية واللغات للسنة الثالثة ثانوي	شعبة التسيير والاقتصاد التسيير المالي و المحاسبي SCF
التحضير لامتحانات شهادة التعليم المتوسط 2013	قسم البحوث والطلبات الخاصة بتلاميذ التعليم الثانوي	
قسم البحوث و الطلبات الخاصة بتلاميذ التعليم المتوسط		

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي قطاع التعليم المدرسي	الأستاذ :	محمد الحيان	النيابة :	ورزازات
	المادة :	الرياضيات	مدة الإنجاز :	3 ساعات
الامتحان التجريبي للبكالوريا 25 مارس 2008	الشعبة :	الثانية بكالوريا علوم فيزيائية الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض	المعامل :	7

التمرين الأول : (3,5 ن)

1. أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\} \quad : \quad \frac{2x^2+3x+2}{x+1}=2x+1+\frac{1}{x+1}$. (0,5)

ب- استنتج قيمة التكامل : $I=\int_0^1\left(\frac{2x^2+3x+2}{x+1}\right)dx$ (1)

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب التكامل التالي : $J=\int_0^1 xe^{-x}dx$ (1)

3. أحسب التكامل : $K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\left|\ln(x)\right|dx$ (1)

التمرين الثاني : (6 نقط)

لكل z من المجموعة $\mathbb{C}$ ، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$

1. حل في المجموعة ، المعادلة التالية : $(E) \quad : \quad z^2-8z+25=0$ (0,75)
2. بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يجب تحديده. (0,75)
3. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث : $\forall z\in\mathbb{C} \quad : \quad P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$ (0,5)
4. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$.

أ- مثل النقط A و B و C و D. (0,5)

ب- بين أن : $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{1}{5}i$ و أن : $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=-\frac{2}{3}i$. (1)

جـ- استنتج طبيعة المثلثين ACD و BCD . (1)

د- بين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى دائرة (Γ) محددا شعاعها ولحق مركزها. (1)

5. نعتبر الإزاحة t التي متجهتها $\overrightarrow{AD}$. حدد لحق النقطة E صورة النقطة C بالإزاحة t . (0,5)

10,5 ن **التمريـــــــــــن الثالـــــــــــث:**

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^3\right) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - بين أن f متصلة في النقطة 0 .	0,5
ب- بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة 0 . (نذكر بأن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$)	1
2. بين أن الدالة تناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $[1,+\infty[$ ، وتزايدية على المجال $[0,1]$.	1,5
3. أ- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.	1
ب- تحقق من أن : $\forall x\in]-\infty,0[\quad : \quad \frac{f(x)}{x}=\frac{3\ln(-x)}{x}+\frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}$.	0,5
جـ- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.	1
4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.	1
5. ليكن h قصور الدالة f على المجال $]-\infty,0[$.	
أ- بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.	0,5
ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.	1
6. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :	

$$\begin{cases} u_0=\frac{4}{9} \\ u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 & ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \frac{4}{9}\leq u_n\leq 1$.	0,75
ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .	0,75
جـ- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها.	1

التمرين الأول :

1. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$. لدينا : $2x+1+\frac{1}{x+1}=\frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2x^2+2x+x+1+1}{x+1}=\frac{2x^2+3x+2}{x+1}$.

ب- لدينا : $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+2}{x+1}dx=\int_0^1 2x+1+\frac{1}{x+1}dx=\left[x^2+x+\ln(|x+1|)\right]_0^1=\boxed{2+\ln 2}$.

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نجد :

$$J=\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 x'\left(e^{-x}\right)dx$$

$$J=-e^{-1}-\int_0^1 -e^{x}dx=-e^{1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-\left(e^{-1}-1\right)=\boxed{1-\frac{2}{e}}$$

3. لنحدد إشارة $\ln x$ على المجال $\left[\frac{1}{e},e\right]$. لدينا :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

باستعمال علاقة شال ، نحصل على ما يلي :

$$K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}|\ln(x)|dx+\int_1^e\frac{1}{x}|\ln(x)|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\ln(x)dx+\int_1^e\frac{1}{x}\ln(x)dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln(x))'\ln(x)dx+\int_1^e(\ln(x))'\ln(x)dx$$

$$K=-\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\boxed{1}$$

التمرين الثاني :

لكل z من $\mathbb{C}$ ، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$.

1. لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ z^2-8z+25=0$.

لدينا : $\Delta'=b'^2-ac=(-4)^2-1\times 25=16-25=-9=(3i)^2$. إذن : للمعادلة (E) حلين عقديين مترافقين هما :

$z_1=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4+3i$ و $z_2=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4-3i$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{4-3i\ ,\ 4+3i\}$.

2. ليكن $z_0=iy$ بحيث $y\in\mathbb{R}$ ، حلا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z)=0$. إذن :

$$P(z_0)=0 \iff z_0^3-(8+3i)z_0^2+(25+24i)z_0-75i=0$$
$$\iff (iy)^3-(8+3i)(iy)^2+(25+24i)(iy)-75i=0$$
$$\iff (8y^2-24y)+i(-y^3+3y^2+25y-75)=0$$
$$\iff \begin{cases}8y^2-24y=0\\ -y^3+3y^2+25y-75=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}8y(y-3)=0\\ -y^3+3y^2+25y-75=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y=0 \text{ أو } y=3\\ -y^3+3y^2+25y-75=0\end{cases}$$
$$P(z_0)=0 \iff \boxed{y=3}$$

وبالتالي فإن $\boxed{z_0=3i}$ هو حل تخيلي صرف للمعادلة $P(z)=0$.

3. لدينا $z_0=3i$ جذر للحدودية $P(z)$. إذن $P(z)$ تقبل القسمة على $z-3i$.

طريقة 1 : **القسمة الأقليدية.**

$$\begin{array}{r|l}
P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i & z-3i \\
\hline
-\quad z^3-3iz^2 \qquad\qquad\qquad & z^2-8z+25 \\
\hline
-8z^2+(25+24i)z-75i & \\
-\quad -8z^2+24iz \qquad\quad & \\
\hline
25z-75i & \\
-\quad 25z-75i & \\
\hline
0\quad 0 &
\end{array}$$

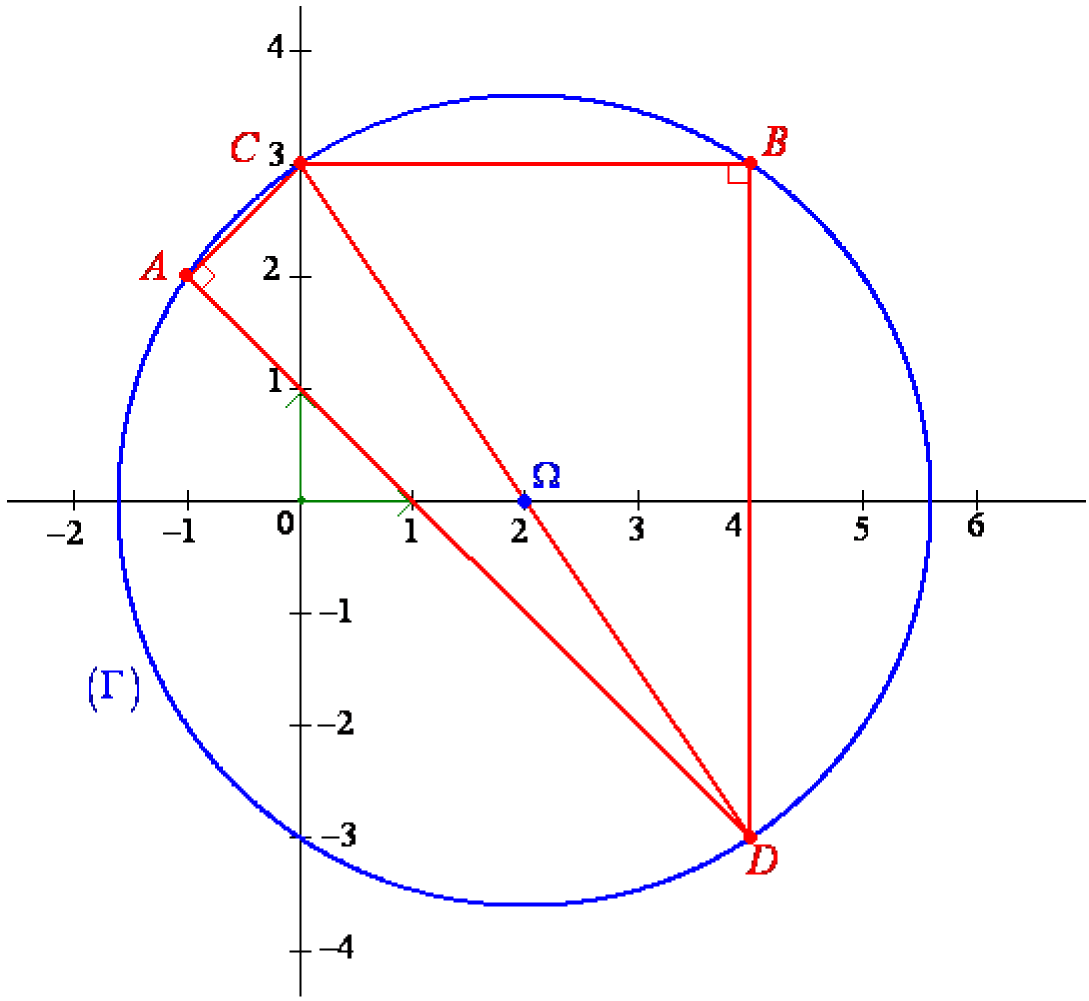
ومنه نستنتج أن : $a=-8$ و $b=25$.

طريقة 2 : **تكون حدوديتان مختصرتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.**

$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \iff P(z)=z^3+az^2+bz-3iz^2-3aiz-3bi$$
$$\iff P(z)=z^3+(a-3i)z^2+(b-3ai)z-3bi$$
$$\iff \begin{cases}a-3i=-8-3i\\ b-3ai=25+24i\\ -3bi=-75i\end{cases}$$
$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \iff \begin{cases}a=-8\\ b=25\end{cases}$$

4. في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$.

أ- تمثيل النقط A و B و C و D في المستوى العقدي $\mathscr{P}$:



ب- لدينا :

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3i-(-1+2i)}{4-3i-(-1+2i)} = \frac{1+i}{5-5i} = \frac{i(1-i)}{5(1-i)} = \boxed{\frac{1}{5}i}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3i-(4+3i)}{4-3i-(4+3i)} = \frac{-4}{-6i} = \frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i^2} = \boxed{-\frac{2}{3}i}$$

ج- لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1}{5}i = \left[\frac{1}{5},\frac{\pi}{2}\right]$. إذن : $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \boxed{\frac{\pi}{2}}\ [2\pi]$. ومنه فإن المثلث ACD قائم الزاوية في A.

ولدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = -\frac{2}{3}i = \left[\frac{2}{3},-\frac{\pi}{2}\right]$. إذن : $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \boxed{-\frac{\pi}{2}}\ [2\pi]$. ومنه فإن المثلث BCD قائم الزاوية في النقطة B.

د- بما أن ACD مثلث قائم الزاوية في A ، فإنه محاط بالدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[CD]$ ، وبما أن BCD مثلث قائم الزاوية في B ، فإنه محاط بالدائرة التي أحد أقطارها $[CD]$ ، أي بالدائرة (Γ) . وبالتالي فإن النقط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة (Γ) ، و

لدينا : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة Ω منتصف القطعة $[CD]$ والتي لحقها: $z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3i+4-3i}{2} = \boxed{2}$.

شعاع الدائرة (Γ) هو $R = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1+2i-2| = |-3+2i| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$.

5. لدينا :

$$t_{\overrightarrow{AD}}(C) = E \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$$
$$\iff z_D - z_A = z_E - z_C$$

إذن : $z_E = z_D - z_A + z_C = 4-3i-(-1+2i)+3i = \boxed{5-2i}$.

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^3\right) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\ge 0 \end{cases}$$

وليكن $\left(\mathscr{C}_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 4x\sqrt{x}-3x^2=f(0)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(1-x^3\right)=\ln1=0=f(0)$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$. ومنه فإن f دالة متصلة في النقطة 0 .

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}4\sqrt{x}-3x=0$.

إذن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و $\boxed{f_d'(0)=0}$.

نضع $t=(-x)^3$. إذن $t\underset{x\mapsto0^-}{\to}0^+$. ومنه فإن :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(1+(-x)^3\right)}{(-x)^3}\times\left(-x^2\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\left(-\sqrt[3]{t^2}\right)=0$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليسار في 0 و $\boxed{f_g'(0)=0}$.

وبما أن $f_g'(0)=f_d'(0)=0$ ، فإن f قابلة للإشتقاق في النقطة 0 ولدينا : $\boxed{f'(0)=0}$.

2. ليكن $x\in\left]-\infty,0\right[$. لدينا : $f'(x)=\left(\ln\left(1-x^3\right)\right)'=\dfrac{\left(1-x^3\right)'}{1-x^3}=\boxed{\dfrac{-3x^2}{1-x^3}}<0$ ، لأن : $-3x^2<0$ و $1-x^3>0$.

إذن f دالة **تناقصية** على المجال $\left]-\infty,0\right[$.

ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$. لدينا : $f'(x)=\left(4x\sqrt{x}-3x^2\right)'=4\left(x'\sqrt{x}+x\left(\sqrt{x}\right)'\right)-6x=4\left(\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)-6x$

$$f'(x)=4\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-6x=\sqrt{x}-6x=6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\boxed{\frac{6\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1-x)}$$

ومنه فإن إشارة $f'(x)$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ هي إشارة $1-x$ ، ولدينا :

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

إذن f دالة **تناقصية** على المجال $\left[1,+\infty\right[$ ، **و تزايدية** على المجال $[0,1]$.

3. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}4x\sqrt{x}-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right)=(+\infty)\times(-\infty)=\boxed{-\infty}$.

نضع $t=1-x^3$. إذن $t\underset{x\mapsto-\infty}{\to}+\infty$ ، ومنه فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(1-x^3\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=\boxed{+\infty}$.

ب- ليكن $x\in\left]-\infty,0\right[$. لدينا :

$$3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}=\frac{\ln\left((-x)^3\right)+\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}=\frac{\ln\left(-x^3\right)+\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}$$
$$=\frac{\ln\left(-x^3\left(1-x^{-3}\right)\right)}{x}=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

جـ- نعلم أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x\sqrt{x} - 3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(4 - 3\sqrt{x}\right) = \boxed{-\infty}$.

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل **فرعا شلجميا**، بجوار $+\infty$ ، **اتجاهه محور الأراتيب**.

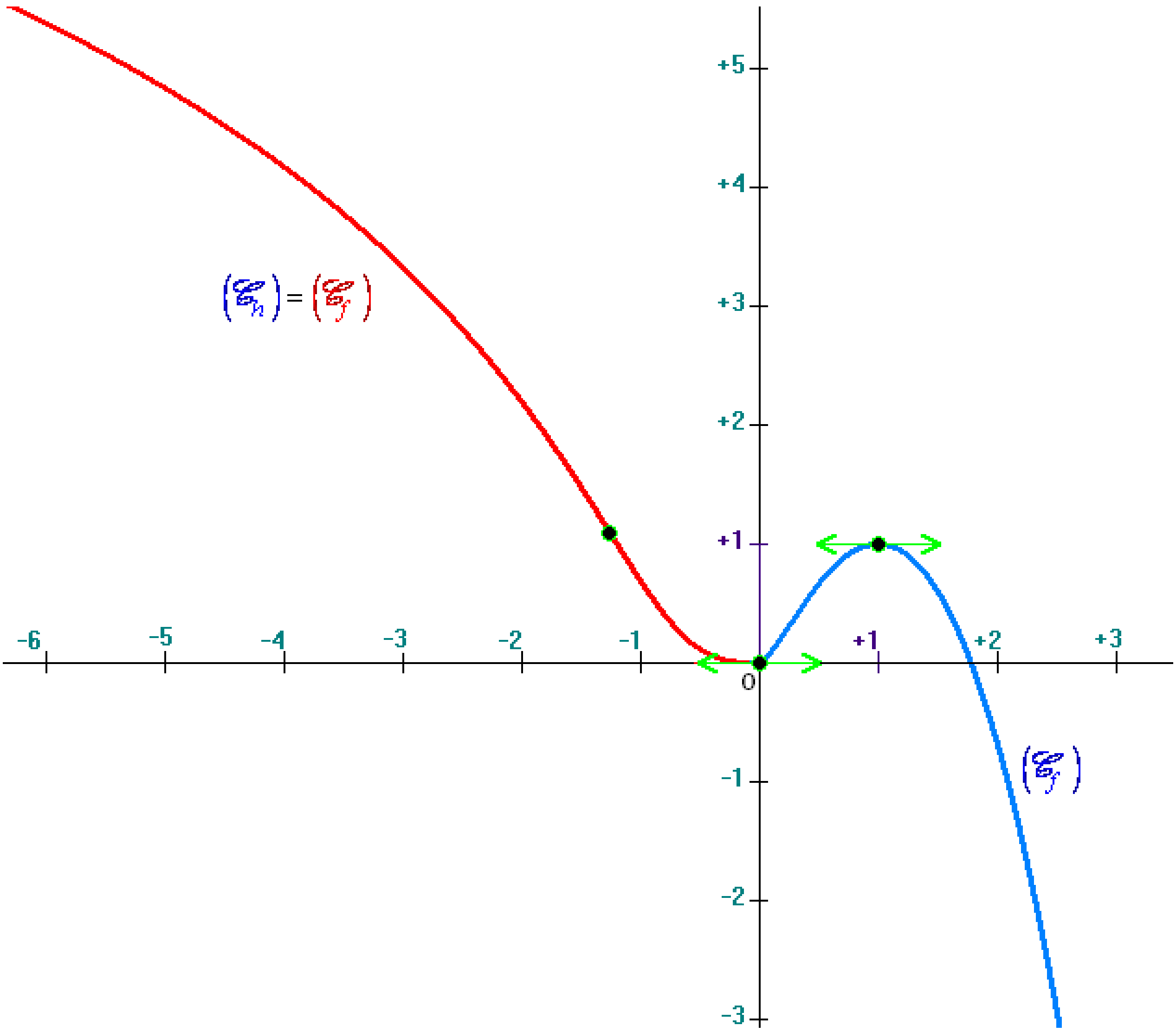
ونعلم أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

نضع $t = -x$. إذن $t \underset{x \mapsto -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

ومنه فإن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3\dfrac{\ln(-x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1 - x^{-3}\right)}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} -3\dfrac{\ln t}{t} - \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{t^3}\right)}{t} = \boxed{0}$.

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل **فرعا شلجميا**، بجوار $-\infty$ ، **اتجاهه محور الأفاصيل**.

4. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$:



5. أ- لدينا h دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty, 0[$. إذن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من المجال

$J = h\left(]-\infty, 0[\right) = \left]\lim\limits_{x \to 0^+} h(x), \lim\limits_{x \to -\infty} h(x)\right[=]0, +\infty[$ نحو المجال $I =]-\infty, 0[$.

ب- لدينا :

$$\begin{array}{llll} h^{-1} : &]0, +\infty[& \to &]-\infty, 0[\\ & x & \mapsto & y = h^{-1}(x) \end{array}$$

ليكن $x \in]0,+\infty[$ و $y \in]-\infty,0[$ بحيث : $y = h^{-1}(x)$ ينبغي تحديده بدلالة x ؟

$$\begin{aligned}
y = h^{-1}(x) &\Leftrightarrow h(y) = x \\
&\Leftrightarrow \ln(1-y^3) = x \\
&\Leftrightarrow 1-y^3 = e^x \\
&\Leftrightarrow -y^3 = e^x - 1 \\
&\Leftrightarrow (-y)^3 = e^x - 1 \\
&\Leftrightarrow (-y)^3 = e^x - 1 \\
&\Leftrightarrow -y = \sqrt[3]{e^x - 1} \quad , \quad (!) \quad y < 0 \\
y = h^{-1}(x) &\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{e^x - 1}
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{h^{-1}(x) = -\sqrt[3]{e^x - 1}}$ $\quad : \quad \forall x \in]0,+\infty[$

6. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{4}{9} \\ u_{n+1} 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{4}{9}$ ، إذن : $\frac{4}{9} \le u_0 \le 1$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$. – نفترض أن : $\frac{4}{9} \le u_n \le 1$.

– نبين أن : $\frac{4}{9} \le u_{n+1} \le 1$.

لدينا : f تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$.

إذن : $\frac{4}{9} \le u_n \le 1 \Rightarrow f\left(\frac{4}{9}\right) \le f(u_n) \le f(1) \Rightarrow \frac{48}{81} \le u_{n+1} \le 1 \Rightarrow \frac{4}{9} \le u_{n+1} \le 1$

لأن : $\frac{4}{9} \le \frac{48}{81}$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\frac{4}{9} \le u_n \le 1}$ $\quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 - u_n = u_n\left(4\sqrt{u_n} - 3u_n - 1\right) \\
&= u_n\left[3\sqrt{u_n} - 3u_n + \sqrt{u_n} - 1\right] = u_n\left[3\sqrt{u_n}\left(1-\sqrt{u_n}\right) - \left(1-\sqrt{u_n}\right)\right] \\
u_{n+1} - u_n &= u_n\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(3\sqrt{u_n} - 1\right)
\end{aligned}$$

وبما أن $\frac{4}{9} \le u_n \le 1$ ، فإن : $\quad u_n \ge 0$ و $u_n \le 1 \Rightarrow \sqrt{u_n} \le 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{u_n} \ge 0$

و : $\quad \frac{2}{3} \le \sqrt{u_n} \le 1 \Rightarrow 2 \le 3\sqrt{u_n} \le 3 \Rightarrow 1 \le 3\sqrt{u_n} - 1 \le 2$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} - u_n \ge 0$. ومنه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

طريقة 2 : **البرهان بالترجع .**

✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=\frac{4}{9}$ و $u_1=f(u_0)=f\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{48}{81}$. إذن : $u_1\geq u_0$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. – نفترض أن : $u_{n+1}\geq u_n$.

– ونبين أن : $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

نعلم أن f تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ وأن $\frac{4}{9}\leq u_n\leq 1 \;:\; \forall n\in\mathbb{N}$.

إذن :
$$\begin{aligned} u_{n+1}\geq u_n &\Rightarrow f(u_{n+1})\geq f(u_n)\\ &\Rightarrow u_{n+2}\geq u_{n+1}\end{aligned}$$

✓ وبالتالي فإن : $u_{n+1}\geq u_n \;:\; \forall n\in\mathbb{N}$.

وعليه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

جـ- بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة ، وبما أن :

✓ f متصلة على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$.

✓ f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$. إذن : $f\left(\left[\frac{4}{9},1\right]\right)=\left[f\left(\frac{4}{9}\right),f(1)\right]=\left[\frac{48}{81},1\right]\subset\left[\frac{4}{9},1\right]$.

✓ $u_0=\frac{4}{9}\in\left[\frac{4}{9},1\right]$.

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l.

فإن : $l=f(l)$ و $l\in\left[\frac{4}{9},1\right]$.

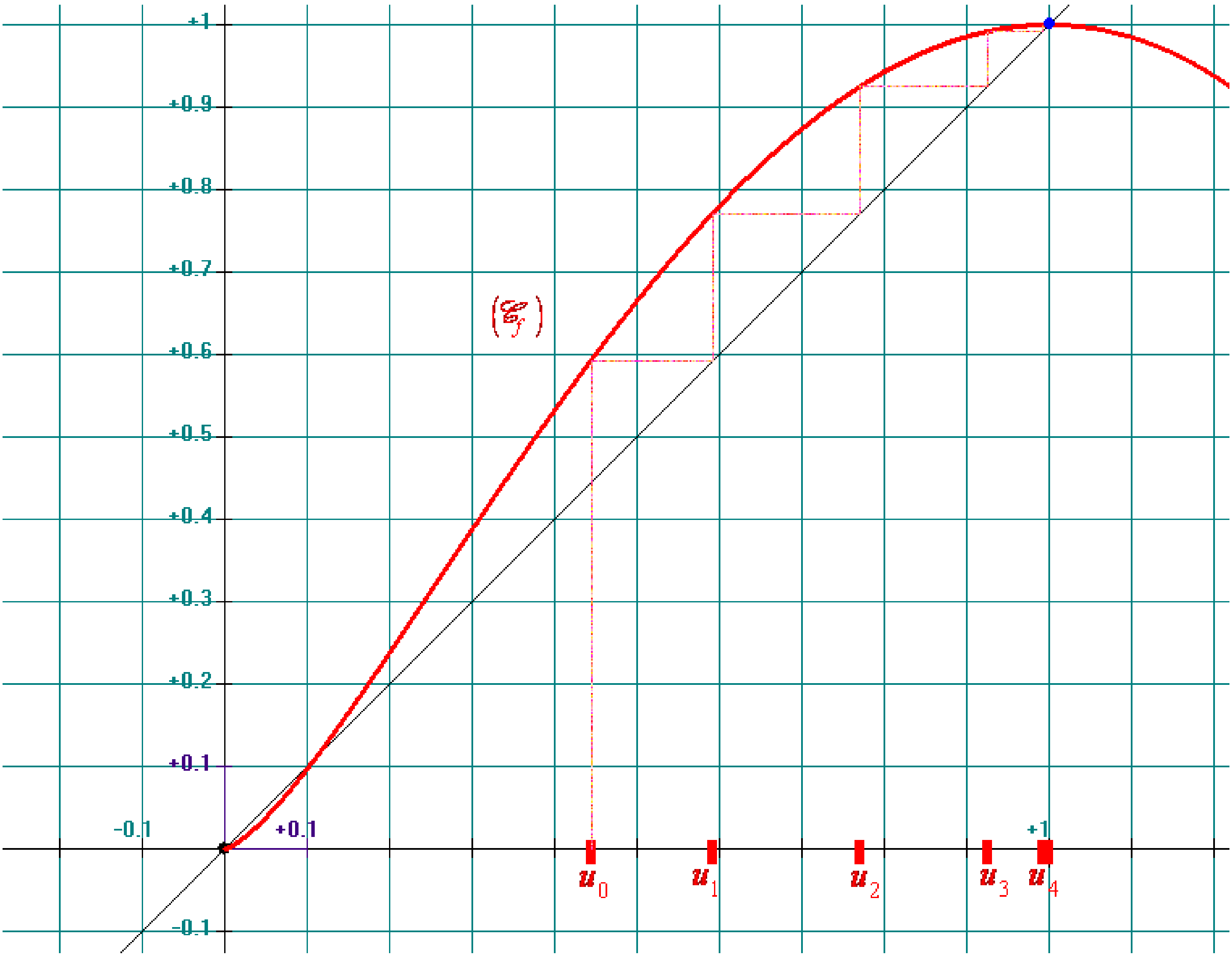
$$\begin{aligned} f(l)=l &\Leftrightarrow 4l\sqrt{l}-3l^2-l=0\\ &\Leftrightarrow l\left(\sqrt{l}-1\right)\left(3\sqrt{l}-1\right)=0\end{aligned}$$

$$f(l)=l \Leftrightarrow l=0 \text{ أو } l=1 \text{ أو } l=\frac{1}{9}$$

وبما أن : $l\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ ، فإن : $l=1$. وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$.

تمثيل حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل : باستعمال البرنام **Archimède II plus**

حساب الحدود الثمانية الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى 10^{-39} : باستعمال البرنام **Maple 8**




```
> f:=x->4*x*sqrt(x)-3*x^2;
```

$$f := x \to 4\,x\,\sqrt{x} - 3\,x^2$$

```
> u||0:=4/9;
```

$$u0 := \frac{4}{9}$$

```
> for n from 0 to 7 do u||(n+1):=evalf ( f(u||n),40) end do;
>
```

$$u1 := .5925925925925925925925925925925925925926$$

$$u2 := .7712140194964303997655401787057750038557$$

$$u3 := .9247701451602197326158548026141754153 92$$

$$u4 := .9916202658372601288144754474477286897 92$$

$$u5 := .9998948176533726249213081014285133390 64$$

$$u6 := .9999999834053018650620684499257125957 82$$

$$u7 := .9999999999999995869239918579099248198 65$$

$$u8 := .9999999999999999999999999999999744052317$$