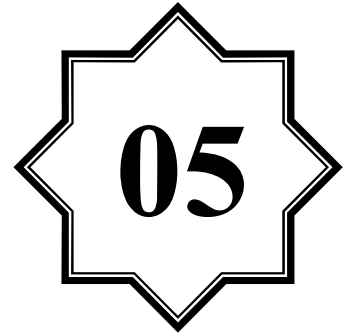


# عروض نظرية و تمارين

التطورات الرتبة ٥

تطور جملة ميكانيكية



الشعب : علوم تجريبية  
رياضيات ، تقني رياضي

\*\*\*\*\*

[www.sites.google.com/site/faresfergani](http://www.sites.google.com/site/faresfergani)

السنة الدراسية : 2016/2015

## 03

المحتوى المفاهيمي :

## حركة الأقمار الاصطناعية و الكواكب

### • دور الحركة الدائرية المنتظمة :

- دور الحركة الدائرية المنتظمة الذي يرمز له بـ  $T$  و وحدته الثانية (s) هو المدة اللازمة لإنجاز دورة واحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{2\pi.r}{v}$$

حيث :

- $r$  : نصف قطر المسار الدائري ( يقدر بالمتر m ) .
- $v$  : سرعة المتحرك على المسار الدائري ( تقدر بالمتر على الثانية m/s ) .

### مثال-1 :

جسم نقطي (S) ، يتحرك على مسار دائري نصف قطره  $r = 50 \text{ cm}$  بسرعة  $v = 2 \text{ m/s}$  . نحسب دور حركة هذا الجسم .

$$T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0.5}{2} = 0.5 \pi = 1.57 \text{ s}$$

### مثال-2 :

جسم نقطي (S) ، يدور بمعدل 600 دورة في الدقيقة ، نحسب دور حركة هذا الجسم .  
- حسب تعريف الدور و المتمثل في أنه الزمن اللازم لإنجاز دورة واحدة ، يكون حسب القاعدة الثلاثة :

$$600 \text{ دورة} \rightarrow 60 \text{ s (1min)}$$

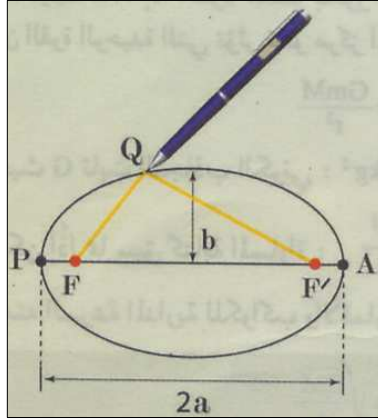
$$1 \text{ دورة} \rightarrow T \text{ s}$$

$$T = \frac{60 \cdot 1}{600} = 0.1 \text{ s}$$

### • قانون كبلر الأول :

خواص الإهليلج :

- الإهليلج هو منحنى يكون فيه دائما مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين  $F$  و  $F'$  ثابتا (الشكل) .



- ينص على ما يلي :

" إن الكواكب تتحرك وفق مدارات اهليلجية تمثل الشمس إحدى محرقها "

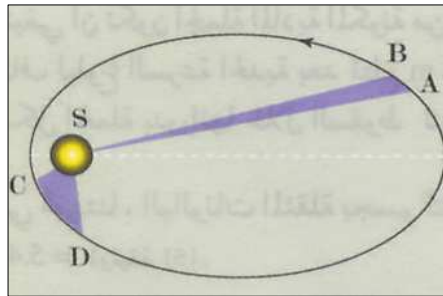
### • قانون كبلر الثاني :

- ينص على ما يلي :

" إن المستقيم الرابط بين الشمس و كوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية "

مثال :

إذا فرضنا أن خلال مجال زمني معين ، ينتقل كوكب من النقطة A إلى النقطة B و ينتقل من C إلى D خلال مجال زمني آخر مساوي للمجال الزمني الأول .



حسب القانون الثاني لكبلر ، المساحتان SAB و SCD متساويتان مادام المجالين الزمنيين متساويين. و هذا يدل على أن سرعة الكوكب حول الشمس ليست ثابتة .

### • قانون كبلر الثالث :

- ينص على ما يلي :

" إن مربع الدور لمدار كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس أي :  $T^2 = k r_m^3$  "

- المسافة المتوسطة تساوي نصف طول المحور الكبير  $a$  و عليه يعبر عن النص بالعلاقة :

$$T^2 = k a^3 \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = k$$

و بعبارة أخرى :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \dots = k$$

$k$  : ثابت صالح لكل الكواكب و مستقل عن كتلة الكواكب.

### • قانون الجذب العام :

- في عام 1687 ، أعطى إسحاق نيوتن قانون الجذب العام في كتابه الشهير على الشكل التالي :

" جسمان كفيان يتجاذبان بقوة تتناسب مباشرة مع جداء كتلتيهما و عكسيا مع مربع المسافة التي تفصلهما "

- يمكن نمذجة قوة الجذب العام ، المتبادلة بين جسمين  $A$  و  $B$  كتلتهما على الترتيب  $M_A$  و  $M_B$  تفصلهما المسافة  $d$  ، بعلاقة رياضية تسمح بتحديد شدة هذه القوة بدلالة الكتلتين و المسافة الفاصلة بين مركزي الجسمين ، تكون كما يلي :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{M_A \cdot M_B}{d^2}$$

حيث  $G$  ثابت التناسب يدعى ثابت الجذب العام و يقدر في الجملة الوحدات الدولية (SI) بالنيوتن في المتر مربع على الكيلوغرام المربع ( $N \cdot m^2 / kg^2$ ) ، و قيمته :  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ .

### التمرين (1) :

يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليلجيا كما يوضحه (الشكل-4) .

ينتقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة  $C$  إلى النقطة  $C'$

ثم من النقطة  $D$  إلى النقطة  $D'$  خلال نفس المدة الزمنية  $\Delta t$  .

1- كيف نسمي النقطتين  $F_1$  ،  $F_2$  ، و ما هي خاصيتيهما .

2- اعتمادا على قانون كبلر الأول حدد موقع الشمس في الشكل .

3- اعتمادا على قانون كبلر الثاني بين أن  $v_{mC} < v_{mD}$  ، حيث

$v_{mC}$  هي متوسط السرعة بين الموضعين  $C$  و  $C'$  و  $v_{mD}$  متوسط

السرعة بين الموضعين  $D$  و  $D'$  .

### الأجوبة :

1- نسمي النقطتين  $F_1$  ،  $F_2$  بمحراقي الإهليلج ، و خاصيتيهما هو أن مجموع بعدهما عن نقطة من الإهليلج يكون ثابت في جميع نقاط هذا الإهليلج .

2- حسب قانون كبلر الأول تقع الشمس في أحد محراقي الإهليلج (النقطة  $F_1$  في الشكل) .

3- إثبات أن  $V_{mC} < V_{mD}$  :

حسب القانون الثاني لكبلر ، تكون المساحة التي يمسحها نصف قطر مسار الكوكب في نفس المدة الزمنية  $\Delta t$  ، نفسها أثناء الانتقال من  $C$  إلى  $C'$  و  $D$  إلى  $D'$  ، و كون أن نصف القطر ليس نفسه في الحالتين يكون من الشكل :

$$CC' < DD'$$

بقسمة الطرفين على المدة  $\Delta t$  :

$$\frac{CC'}{\Delta t} < \frac{DD'}{\Delta t} \rightarrow V_{mC} < V_{mD}$$

## التمرين (2) :

يتحرك قمر إصطناعي (S) بسرعة ثابتة على مدار دائري حول الأرض نصف قطره  $r$  . أكتب العبارات التالية :

- 1- عبارة شدة القوة المؤثرة على القمر الإصطناعي بدلالة  $G$  ،  $m$  ،  $M_T$  ،  $r$  ، حيث  $G$  : ثابت الجذب العام ،  $m$  : كتلة القمر الإصطناعي ،  $M_T$  : كتلة الأرض ،  $r$  : نصف قطر مسار القمر الإصطناعي حول الأرض .
- 2- أوجد باستعمال التحليل البعدي وحدة ثابت الجذب العام ( $G$ ) في الجملة الدولية (SI) .
- 3- بتطبيق القانون الثاني لنیوتن استنتج عبارة التسارع الناظمي بدلالة  $G$  ،  $M_T$  ،  $r$  .
- 4- أوجد عبارة سرعة القمر الإصطناعي بدلالة  $G$  ،  $M_T$  ،  $r$  .
- 5- أوجد عبارة دور القمر الإصطناعي بدلالة  $r$  ،  $v$  .
- 6- أوجد عبارة دور القمر الإصطناعي بدلالة  $G$  ،  $M_T$  ،  $r$  .
- 7- أثبت أن النسبة  $\frac{T^2}{r^3}$  ثابتة من أجل أي قمر اصطناعي .

8- ما معنى قمر إصطناعي جيو مستقر . أوجد ارتفاع هذا القمر الإصطناعي على سطح الأرض و كذا سرعته على مداره .

المعطيات :

- ثابت الجذب العام :  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$  .
- كتلة الأرض :  $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  .
- نصف قطر الأرض :  $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$  .
- دور حركة الأرض حول نفسها :  $T = 23 \text{ h} , 56 \text{ min}$  .

## الاجوبة :

1- عبارة شدة القوة المؤثرة :

حسب قانون الجذب العام يخضع القمر الاصطناعي إلى قوة  $\vec{F}_{T/S}$  ناتجة عن جذب الأرض (T) للقمر الاصطناعي (S) و حسب ذات القانون شدة هذه القوة هي :

$$\|\vec{F}_{T/S}\| = F = G \frac{m \cdot M_T}{r^2}$$

2- وحدة  $G$  :

- لدينا :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} \rightarrow G = \frac{F \cdot r^2}{m \cdot M}$$

$$[G] = \frac{[F].[r]^2}{[M].[M]}$$

حسب قانون نيوتن الثاني يمكن كتابة :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a} \rightarrow [F] = [M].[a]$$

و منه يصبح :

$$[G] = \frac{[M].[a].[r]^2}{[M].[M]} \rightarrow [G] = \frac{[a].[r]^2}{[M]}$$

$$\rightarrow [G] = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg} \rightarrow [G] = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg} \rightarrow [G] = m^3 / s^2 \cdot kg .$$

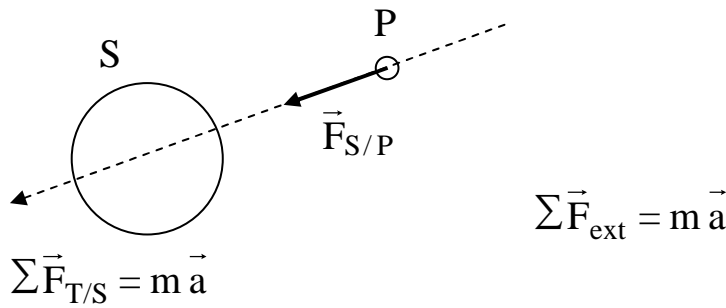
3- عبارة  $a_n$  :

- الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .

- مرجع الدراسة : مركزي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : القوة  $(\vec{F}_{T/S})$  .

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



بتحليل العلاقة الشعاعية على المحور الناظمي :

$$F_{T/S} = m a_n$$

$$G \frac{m \cdot M_T}{r^2} = m a_n \rightarrow a_n = G \frac{M_T}{r^2}$$

4- عبارة سرعة القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة  $r$  ،  $M_T$  ،  $G$  :  
لدينا من جهة :

$$a_n = G \frac{M_T}{r^2}$$

ومن جهة أخرى :

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

ومنه :

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M_T}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

5- عبارة الدور بدلالة  $r$  ،  $v$  :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

6- عبارة الدور بدلالة  $G$  ،  $M_T$  ،  $r$  :

بتعويض عبارة السرعة  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$  في عبارة الدور  $T = \frac{2\pi r}{v}$  نجد :

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{G \cdot M_T}{r^2}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}}$$

7- إثبات أن النسبة  $\frac{T^2}{r^3}$  ثابتة :

مما سبق لدينا :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

$\pi$  ،  $G$  ،  $M_T$  ثوابت ، إذن النسبة  $\frac{T^2}{r^3}$  ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية .

8- معنى قمر جيو مستقر :

يعني أثناء حركته يكون ثابت بالنسبة لنقطة من سطح الأرض ، وبالتالي فهو يتحرك في جهة حركة الأرض حول نفسها بالإضافة إلى أن دوره مساوي لدور الأرض .

- ارتفاع القمر الجيومستقر :

إذا كان  $z$  هو ارتفاع القمر الاصطناعي بالنسبة للأرض و كان  $R$  هو نصف قطر الأرض يكون :  $r = R + z$  و منه يمكن كتابة :

$$\frac{T^2}{(R + z)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$(R + z)^3 = \frac{T^2 G M_T}{4\pi^2} \rightarrow (R + z) = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} \rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} - R$$

$$T = (23 \cdot 3600) + (56 \cdot 60) = 86160 \text{ s}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{(86160)^2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6.37 \cdot 10^6 = 3.5816 \cdot 10^7 \text{ m} = 35816 \text{ km}$$

- سرعة القمر الاصطناعي على مساره :

مما سبق يمكن كتابة :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R + z)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(3.37 \cdot 10^6 + 3.58 \cdot 10^7)}} = 3191 \text{ m/s}$$

**التمرين (3) :**

- كوكب كتلته  $m$  يدور حول الشمس ذات الكتلة  $M$  متبعا مساراً نعتبره دائرياً مركزه  $O$  هو مركز عطالة الشمس .
- 1- بين أن حركة مركز عطالة هذا الكوكب دائرية منتظمة بالنسبة للمرجع الهيليو مركزي .
  - 2- أوجد عبارة سرعة الكوكب  $v$  بدلالة كل من ثابت الجذب العام  $G$  ، كتلة الشمس  $M$  و البعد  $r$  بين مركزي العطالة لكل من الكوكب و الشمس .
  - 3- اذكر نص قانون كبلر الثالث .
  - 4- كوكبا الأرض و المريخ يدوران حول الشمس على مدارين يمكن اعتبارهما دائريين ، مركزهما هو مركز الشمس  $O$  . استنتج قيمة  $r_m$  نصف قطر مدار المريخ .
- المعطيات :

- ثابت الجذب العام :  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$  .
- نصف قطر مدار الأرض حول الشمس :  $r_t = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$  .
- مدة دوران الأرض حول الشمس :  $T_t = 365.25 \text{ j}$  .
- مدة دوران كوكب المريخ حول الشمس :  $T_m = 687 \text{ j}$  .

**الأجوبة :**

1- إثبات أن حركة الكوكب دائرية :

- الجملة المدروسة : كوكب (P) .

- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .

- القوى الخارجية المؤثرة : القوة  $\vec{F}_{S/P}$  الناتجة عن جذب الشمس للكوكب

- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{S/P} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين المماسي و الناطمي :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a_t \dots\dots\dots (1) \\ F = m \cdot a_n \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

الطريقة الأولى :

- من العلاقة (1) :

$$a_t = 0$$

و حيث أن :  $a_t = \frac{dv}{dt}$  يكون :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow v = C$$

أي أن سرعة القمر الاصطناعي ثابتة ، و كون أن مساره دائري ، تكون حركته دائرية منتظمة .

الطريقة الثانية :

نحسب قيمة التسارع :

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}$$

- من العلاقة (1) و مما سبق وجدنا :  $a_t = 0$  .

من العلاقة (2) نكتب :

$$\frac{G.m.M}{r^2} = m a_n \rightarrow a_n = \frac{GM}{r^2}$$

و منه يصبح :

$$a = a_n = \frac{GM}{r^2}$$

$G$  ،  $M$  ،  $r$  ثابت ، منه التسارع يكون ثابت ، و كون أن المسار دائري ، فحركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة .

2- عبارة  $v$  بدلالة  $G$  ،  $M$  ،  $r$  :

من العلاقة (2) :

$$F = m a_n$$

$$G \frac{mM}{r^2} = m a \rightarrow G \frac{M}{r^2} = a_n$$

و حيث أن حركة الكوكب دائرية منتظمة يكون  $a_n = \frac{v^2}{r}$  و منه يصبح :

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3- قانون كبلر الثالث :

يتناسب مربع دور كوكب  $T$  مع مكعب البعد المتوسط  $r$  للكوكب عن الشمس أي :

$$T^2 = \alpha r^3$$

أو :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \dots = \alpha$$

حيث  $\alpha$  هو ثابت التناسب

4- نصف قطر كوكب المريخ :

بتطبيق قانون كبلر الثالث بالنسبة لكوكب الأرض  $t$  و كوكب المريخ  $m$  نكتب :

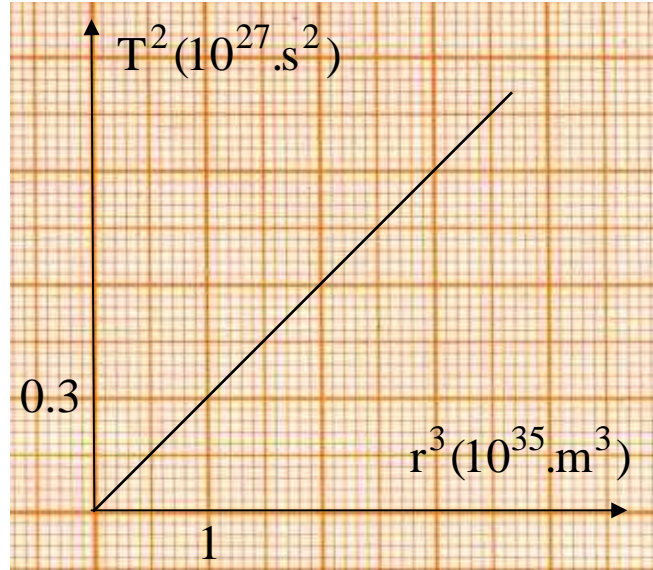
$$\frac{T_t^2}{r_t^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3} \rightarrow r_m = \sqrt[3]{\frac{T_m^2 \cdot r_t^3}{T_t^2}}$$

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{(687 \text{ jours})^2 (150.10^6 \text{ km})^3}{(365.25 \text{ jours})^2}} = 2.29.10^8 \text{ km}$$



**التمرين (4) :**

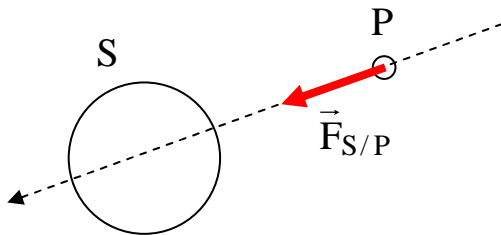
مسار الكوكب حول الشمس اهليلجي و من أجل التبسيط نمذجته في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره  $r$ .  
 باستعمال برمجة "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان  $T^2 = f(r^3)$  (الشكل-6). حيث T دور الحركة



- 1- ندرس حركة الكوكب في المرجع المركزي الشمسي (الهيليومركزي) الذي نعتبره غاليليا ، عرف المرجع المركزي الشمسي .
- 2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من السرعة  $v$  و دور حركة الكوكب T بدلالة  $G$  ،  $M$  ،  $r$  .
- 3- اعتمادا على البيان :  
 أ- استنتج نص قانون كبلر الثالث .  
 ب- أوجد كتلة الشمس .  
 يعطى :  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$  .

**الأجوبة :**

- 1- تعريف المرجع المركزي الشمسي :  
 هو مرجع مبدأ معلمه منطبق على مركز الشمس و محاوره الثلاث تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة نعتبرها ثابتة بالنسبة لمركز الشمس .
- 2- عبارة  $v$  دلالة  $G$  ،  $M$  ،  $r$  :  
 - الجملة المدروسة : كوكب .  
 - مرجع الدراسة : هيليو مركزي .  
 - القوى الخارجية المؤثرة : القوة  $\vec{F}_{S/P}$  الناتجة عن جذب الشمس للكوكب (قوة الجذب العام)



- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{F}_{S/P} = m \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور الناظمي :

$$F = m a_n$$

$$\frac{G.mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{G.M}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

• عبارة T بدلالة G ، M ، r :  
لدينا :

$$T = \frac{2\pi.r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi.r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.r}{\frac{G.M}{r}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.r^3}{G.M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2.r^3}{G.M}}$$

3- أ- نص قانون كبلر الثالث :

المنحنى  $T^2 = f(r^3)$  عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل  $T^2 = k r^3$  ، حيث k هو ميل المنحنى المستقيم ، نستنتج من ذلك أن مربع حركة كوكب حول الشمس يتناسب طردياً مع مكعب البعد المتوسط r بين مركز الكوكب و مركز الشمس ، و هو القانون الثالث لكبلر .

ب- كتلة الشمس :

- من البيان لدينا :

$$T^2 = k r^3 \dots\dots\dots (1)$$

و لدينا مما سبق :

$$T = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \dots\dots\dots (2)$$

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$$\frac{4\pi^2}{GM} = k \rightarrow \frac{4\pi^2}{G.a}$$

- نحسب الميل :

$$k = \frac{0.3 \cdot 10^{17}}{1 \cdot 10^{35}} = 3 \cdot 10^{-19}$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{-19}} = 1.97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$