اقتراح : الأستاذ : حليلات عمار **تصحيح : الأستاذ : حميدي بوثلجة**

سلسلة استعد للبكالوريا رقم 9

العد (التحليل التوفيقي)

التمرين (01) : توزيع الكرات :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	المجموع
العدد	4	6	8	14
مرقمة من	1 إلى 4	1 إلى 6	1 الى8	

لسحب : ثلاث كرات في آن واحد (توفيقة)

1) أ) عدد الحالات للحصول على 3 أرقام فردية :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	عدد الأرقام الفردية
عدد كرات	4	6	8	
أرقام فردية	1، 3	3،1 ،5	1،3 ،5 ،7	9

نختار 3 أرقام فردية من بين 9 أرقام فردية عدد الاختيارات: $C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

ب) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء على الأقل:

	على الأقل كرة حمراء من بين الثلاثة تعني					
!!!!	1 حمراء و 2 ليست حمراء	إما	2 حمراء و 1 ليست حمراء	إما	3 حمراء	المجموع
	$C_4^1\times C_{14}^2$	+	$C_4^2\times C_{14}^1$	+	C_4^3	452
العدد	4×91	+	6×14	+	4	

طريقة ثانية : الحالة الوحيدة التي لم تحسب من بين كل الحالات الممكنة في الجدول (!!!!) هي سحب ثلاث كرات ليست حمراء و عدد الحالات الممكنة لذلك هي : $C_{14}^3 = 364$ نطرح هذا العدد من عدد كل الحالات الممكنة أي C_{18}^3 نجد كذلك 452 .

جـ) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4 .
توجد 3 كرات تحمل الرقم 4 نختار من بينها كرة واحدة و توجد 14 كرة لا تحمل الرقم 4 نختار من بينها اثنتان. عدد الحالات هو : $C_3^1\times C_{14}^2 = 3\times91 = 273$.

التمرين (02) : المعطيات : 3 كتب رياضيات + 2 كتب فيزياء +4 كتب أدب عربي
التجربة : وضع هذه الكتب (عددها 9) على رف مكتبته
أ) وضع كتب نفس المادة متجاورة : هذه الحالة تمثل ترتيب 3 مواد وعددها هو عدد التبديلات ذات 3 عناصر.
عدد الحالات الممكنة يساوي $3\,! = 6$.
ب) كتب الأدب العربي فقط تبقى متجاورة : نتعامل هنا مع مجموعة كتب الأدب العربي كعنصر واحد في تبديلها مع بقية العناصر أي الكتب الخمسة (3+2) .
عدد الحالات الممكنة : $6\,! = 720$.
جـ) دون أي شرط : عدد الحالات هو عدد التبديلات ذات 9 عناصر : $9\,! = 362880$.

التمرين (03) :

1) لما n = 0 ، الخاصية صحيحة لأن : $2^0 = C_0^0 = 1$.

لما $n \neq 0$ ، نعوض a = b =1 في دستور ثنائي الحد :

$$(a+b)^n = C_n^0 \times a^n + C_n^1 \times a^{n-1} \times b + ... + C_n^p \times a^{n-p} \times b^p + ...C_n^n \times b^n \qquad (p \leq n)$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 \times 1^n + C_n^1 \times 1^{n-1} \times 1 + ... + C_n^p \times 1^{n-p} \times 1^p + .. + .C_n^n \times 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + .. + .C_n^n$$

2) أ) n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq m$ هنا يجب فرض $m \geq 1$. نبرهن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

$$mC_n^m = m \times \frac{n!}{m! \times (n-m)!} = \frac{n!}{(m-1)! \times (n-m)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times ((n-1)-(m-1))!} = n \times C_{n-1}^{m-1}$$

ب) قيمة المجموع : $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

$$S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m = 0 \times 1 + 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + ... + p \times C_n^p + ... + n \times C_n^n$$

$$= 0 + n \times C_{n-1}^0 + n \times C_{n-1}^1 + ... + n \times C_{n-1}^{p-1} + ... + n \times C_{n-1}^{n-1}$$

$$= n \times \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{p-1} + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \times 2^{(n-1)}$$

التمرين (04) :

1) أ) حل المعادلة : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n + 1$ بما أن مهما يكن n : $C_n^0 = 1$

المعادلة تكتب : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n$. حتى تقبل المعادلة حلولا يجب أن يكون عددا زوجيا لأن الطرف الأول عدد طبيعي و يكون الطرف الثاني طبيعيا إذا كان n زوجيا .

*إذا كان n = 0 فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0 .

* إذا كان n = 2 فإن الطرف الأول يساوي 0 و الطرف الثاني يساوي 5.

* إذا كان: $n \geq 3$. فإن : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة : $\frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} = \frac{5}{2}n$

بعد الاختزال نجد : $n^2 = 16$ أي $n = 4$. مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

(ضرورة التحقق).

ب) حل المعادلة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

* إذا كان n = 0 فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0

* إذا كان n = 1 فإن الطرف الأول يساوي 1 و الطرف الثاني يساوي 8

* إذا كان n = 2 فإن الطرف الأول يساوي 6 و الطرف الثاني يساوي 16

* إذا كان: $n \geq 3$. فإن: $C_n^3 + C_{2n}^2 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة: $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2} = 8n$

بعد الاختزال نجد : $n^2+9n-52=0$ ، $\Delta=289=17^2$ و $n=4$
مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

2) حل في IN^2 الجملة : $\begin{cases} C_{x+1}^{y}=C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2}=10 \end{cases}$

الشروط : y-1 ≥ 0

الحالة الأولى : x < y-1 و x + y ≥ 2 . تكتب الجملة : $\begin{cases} 0=0 \\ \frac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $(x+y)\times(x+y-1)=20$ بما أن $(x+y)$ و $(x+y-1)$ عددين متتابعين نستنتج أن :
$x+y=5$. الثنائيات الطبيعية التي تحقق هي : (0,5) و(1,4) .

الحالة الثانية: x ≥ y-1 وx + y ≥ 2 تكتب الجملة : $\begin{cases} C_x^{y}+C_x^{y-1}=C_x^{y-1} \\ \frac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$ أي $\begin{cases} C_x^{y}=0 \\ \frac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $x+y=5$ و $x\prec y$. الثنائي, التي تحقق هي : (2,3)
حلول الجملة هي الثنائيات (2,3); (1,4); (0,5) .

التمرين (05) : مركز الأبحاث يتكون من : 6 باحثين و 4 باحثات
اللجنة : 4 أعضاء

1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها : عدد التوفيقات ذات 4 عناصر من مجموعة ذات 10 عناصر

$$C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

2) أ) عدد اللجان التي تضم 4 باحثات : $C_4^4=1$

ب) عدد اللجان التي تضم باحثة واحدة فقط : $C_4^1\times C_6^3=4\times20=80$

جـ) عدد اللجان التي تضم باحثة على الأقل: $C_{10}^4-C_6^4=210-15=195$ (انظر التمرين (01))

د) يوجد في اللجنة باحثان على الأكثر:
تعني : (باحثان وباحثتان) إما (باحث وثلاث باحثات) إما (أربع باحثات)
العدد : $C_6^2\times C_4^2 \quad + \quad C_6^1\times C_4^3 \quad + \quad C_4^4$
بعد الحساب نجد : 115 .

3) عدد اللجان التي تضم رئيسا ونائبا له وكاتبين : عدد الترتيبات ذات 4 عناصر أي :

$$(4!)\times C_{10}^4=24\times210=5040$$

التمرين (06) : n عدد طبيعي غير معدوم : $L_n=9C_{n+1}^2+27C_{n+1}^3+81C_{n+1}^3+......+3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1) نبين أن : $L_n=4^{n+1}-3n-4$

نعوض في دستور ثنائي الحد : a = 3 و b = 1 (انظر التمرين (03))

$$4^{n+1}=(1+3)^{n+1}=C_{n+1}^0\times1^{(n+1)}+C_{n+1}^1\times1^n\times3^1+C_{n+1}^2\times1^{(n-1)}\times3^2+...+C_{n+1}^{n+1}\times1^0\times3^{(n+1)}$$

$$4^{n+1}=1+(n+1)\times3+3^2\times C_{n+1}^2+3^3\times C_{n+1}^3+.....+3^{n+1}\times C_{n+1}^{n+1}$$

$$4^{n+1}=3n+4+L_n$$

نستنتج أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2) حساب المجموع : $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$

$$S_n = \left(4^2 - 7\right) + \left(4^3 - 10\right) + ... + \left(4^{n+1} - 3n - 4\right)$$
$$= \left(4^2 + 4^3 + ... + 4^{n+1}\right) - \left(7 + 10 + ... + 3n + 4\right)$$

القوس الأول يمثل مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 4^2 وأساسها 4 وعدد حدودها (n-1)

و القوس الثاني يمثل مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 7 وأساسها 3 وعدد حدودها (n-1)

نستنتج أن : $S_n = \left(4^2 \times \dfrac{4^{(n-1)} - 1}{4 - 1}\right) - \left((n-1) \times \dfrac{(7 + 3n + 4)}{2}\right) = \dfrac{16}{3}\left(4^{(n-1)} - 1\right) - \dfrac{(n-1)\times(3n+11)}{2}$

<u>التمرين (07) :</u>

1) برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...n\times(n!) = (n+1)! - 1$

المرحلة الأولى :

التحقق من أجل n = 0 . الطرف الأول : $0\times 0! = 0$ والطرف الثاني : $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي كيفي n .نفرض : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...n\times(n!) = (n+1)! - 1$

ونبرهن أن : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...(n+1)\times(n+1)! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$

$$1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...(n+1)\times(n+1)! = 1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ... + n\times n! + .(n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)!\times(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2n-1)\right] = \dfrac{(2n)!}{n!}$

<u>المرحلة الأولى</u> :

التحقق من أجل n = 1 . الطرف الأول : $2^1 \times 1 = 2$ والطرف الثاني : $\dfrac{(2\times 1)!}{2!} = \dfrac{2!}{2!} = \dfrac{2}{2} = 1$

<u>لمرحلة الثانية</u> : من أجل عدد طبيعي كيفي n غير معدوم نفرض: $2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2n-1)\right] = \dfrac{(2n)!}{n!}$

ونبرهن أن : $2^{(n+1)}\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2(n+1)-1)\right] = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$

$$2^{(n+1)}\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2(n+1)-1)\right] = 2\times 2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....(2n-1)\times(2n+1)\right]$$
$$= 2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....(2n-1)\right]\times 2\times(2n+1)$$
$$= \frac{(2n)!}{n!}\times 2\times(2n+1) = \frac{(2n)!}{n!(\mathbf{n}+\mathbf{1})}\times(2n+1)\times 2(\mathbf{n}+\mathbf{1})$$
$$= \frac{(2n)!\times(2n+1)\times(2n+2)}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{\left[2(n+1)\right]!}{(n+1)!}$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

التمرين (08) :

المعطيات: صندوق (10 كرات) : $\left\{\begin{array}{l}\text{4 سوداء}\\ \text{6 بيضاء}\end{array}\right.$

التجربة : 3 كرات في آن واحد : (توفيقة ذات 3 عناصر)

1) أ) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء : $C_6^1 \times C_4^2 = 36$

ب) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء على الأقل : $C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3 = C_{10}^3 - C_4^3 = 116$

جـ) عدد الحالات للحصول على 3 كرات ليست من نفس اللون : $C_{10}^3 - \left(C_4^3 + C_6^3\right) = 120 - (4+20) = 96$

الشرح : من عدد كل الحالات الممكنة نحذف الحالات التي تكون فيها كل الكرات حمراء وعددها 4 والحالة التي تكون فيها كل الكرات سوداء وعددها 20 .

2) المعطيات:

المعطيات: صندوق (10+ 2n كرات) : $\left\{\begin{array}{l}\text{(n+4) سوداء}\\ \text{(n+6) بيضاء}\end{array}\right.$

التجربة : سحب كرتين معا (لأن X_n عدد الحالات لسحب كرتين من نفس اللون)

أ) حساب العدد X_n :

$$X_n = C_{n+4}^2 + C_{n+6}^2 = \frac{(n+4)\times(n+3)}{2} + \frac{(n+6)\times(n+5)}{2}$$
$$= \frac{\left(\mathrm{n}^2 + 7n + 12\right)\times\left(\mathrm{n}^2 + 11n + 30\right)}{2} = \frac{2\mathrm{n}^2 + 18n + 42}{2} = \mathrm{n}^2 + 9n + 21$$

ب) نحل المعادلة : $X_n = 10713$ أي $\mathrm{n}^2 + 9n - 10692 = 0$ نجد $\Delta = 42849$ و $\mathrm{n} = 99$.

التمرين (09) : يعطى المنشور التالي : $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ نفرض طبعا $x \neq 0$

حسب دستور ثنائي الحد كل حد من حدود النشر يكتب: $C_{15}^p \times \left(x^3\right)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p$ مع $0 \le p \le 15$.

بما أن $\left(x^3\right)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p = x^{45-3p} \times \frac{(-2)^p}{x^{2p}} = (-2)^p \times x^{45-5p}$ فإن كل حد من الحدود يكتب :

$$C_{15}^p \times (-2)^p \times x^{45-5p}$$

1) يكون الحد درجته 10 إذا كان : $45 - 5p = 10$ أي $p = 7$. الحد هو : $C_{15}^7 \times (-2)^7 \times x^{10}$

2) الحد التاسع تقابله قيمة $p = 8$.الحد هو : $C_{15}^8 \times (-2)^8 \times x^5$ لأن قيمة p تبدأ من 0 .

3) يكون الحد ثابتا إذا كان : $45 - 5p = 0$ أي $p = 9$. الحد هو $C_{15}^9 \times (-2)^9 \times x^0 = C_{15}^9 \times (-2)^9$

التمرين (10) :

1) إثبات أن : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ الشرط : $n \ge m \ge 1$

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times (n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m! \times (n-m-1)!} = \frac{(n-1)![m+n-m]}{m! \times (n-m)!} = \frac{(n-1)! \times n}{m! \times (n-m)!} = C_n^m$$

استنتاج أن: $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$.

بتعويض m بـ m +1 و تعويض n على التوالي بالقيم n +1 ، n ، n-2 ، ....، m +1 ، m

في : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

نحصل على :

$$\left\{\begin{array}{l} C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + \cancel{C_n^{m+1}} \\ \cancel{C_n^{m+1}} = C_{n-1}^m + \cancel{C_{n-1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-1}^{m+1}} = C_{n-2}^m + \cancel{C_{n-2}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-2}^{m+1}} = C_{n-3}^m + C_{n-3}^{m+1} \\ . \\ . \\ \cancel{C_{m+2}^{m+1}} = C_{m+1}^m + \cancel{C_{m+1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{m+1}^{m+1}} = C_m^m + C_m^{m+1} \end{array}\right.$$

بالجمع طرف لطرف و اختزال الحدود المتساوية

يبقى في الطرف الأول الحد C_{n+1}^{m+1}

و يبقى في الطرف الثاني المجموع المطلوب :

$$C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$$

ملاحظة في الطرف الثاني : $C_m^{m+1} = 0$

2) * حساب المجموع : $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$

بتعويض m = 1 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد :

$C_n^1 + C_{n-1}^1 + ... + C_1^1 = C_{n+1}^2$ أي $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1) \times n}{2}$

* حساب المجموع: $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n \times (n-1)$

بتعويض m = 2 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد:

$C_n^2 + C_{n-1}^2 + ... + C_2^2 = C_{n+1}^3$ أي $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1) \times (n-2)}{2} + ... \frac{2 \times 1}{2} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3 \times 2}$

بضرب الطرفين في 2 نجد: $S_2 = \frac{(n+1)n \times (n-1)}{3}$

* حساب المجموع: $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

لدينا $n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n$ بالتعويض في عبارة S_3

$$S_3 = 1 + (2 + 2 \times 1) + (3 + 3 \times 2) + ... + (n + n(n-1))$$

$$= (1 + 2 + 3 + ... + n) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n-1) \times n)$$

$$= S_1 + S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الأستاذ : حميدي بوثلجة من البيض

التاريخ : 2008/05/25