التصحيح المفصل لاختبار مادة الرياضيات بكالوريا 2016 شعبة علوم التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) شعاع توجيه المستوي (P) هو $\vec{v}(2;1;-1)$ شعاع توجيه المستوي (P') هو $\vec{v'}(1;-2;1)$ بما أن $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2}$ فإن الشعاعان $\vec{v'}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا فإن المستويان (P) و (P') غير متوازيان فهما متقاطعان

2) (Γ) هي اتحاد المستويان المتعامدان المنصفان لزاويتان المحصورتان بين المستويين (P) و (P').

3) لدينا $d(A,(P)) = \frac{|2(1)+(2)-0+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ و $d(A,(P')) = \frac{|(1)-2(2)+0-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ و منه $d(A,(P')) = d(A,(P))$

إذن $A \in (\Gamma)$ و هو المطلوب .

4) أ) المستقيم (AH) شعاع توجيهه $\vec{v}(2;1;-1)$ و يشمل النقطة A تمثيله الوسيطي هو $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$.

المستقيم (AH') شعاع توجيهه $\vec{v'}(1;-2;1)$ و يشمل النقطة A تمثيله الوسيطي هو $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x = 2+t' \\ y = 1-2t' \\ z = t' \end{cases}$.

ب) النقطة H هي تقاطع المستقيم (AH) المستوي (P) نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) في المعادلة الديكارتية للمستوي (P) نجد $2(2+2t)+(1+t)-(-t)+1=0$ يكافئ $6t=-6$ و منه $t=-1$ و منه $H(0;0;1)$.

النقطة H' هي تقاطع المستقيم (AH') المستوي (P') نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH') في المعادلة الديكارتية للمستوي (P') نجد $(2+t')-2(1-2t')+(t')-2=0$ يكافئ $6t'=2$ و منه $t'=\frac{1}{3}$ و منه $H'\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

5) منتصف القطعة المستقيمة $[HH']$ هو $I\left(\frac{7}{6};\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right)$ مساحة المثلث AHH' هي $S = AI \times IH$ و لدينا

$$AI = \sqrt{\left(1-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+121+16}}{6} = \frac{\sqrt{138}}{6}$$ و

$$IH = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(1-\frac{4}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{49+1+4}}{6} = \frac{\sqrt{54}}{6}$$ و منه $S = \frac{\sqrt{138}}{6}.\frac{\sqrt{54}}{6} = \frac{18\sqrt{23}}{36} = 2,397916$.

التمرين الثاني :

الجزء الأول :

1) أ)حساب $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$.

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة f المشتقة $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+8}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}$ و هي موجبة على $[0;+\infty[$ و منه fمتزايدة على هذا المجال

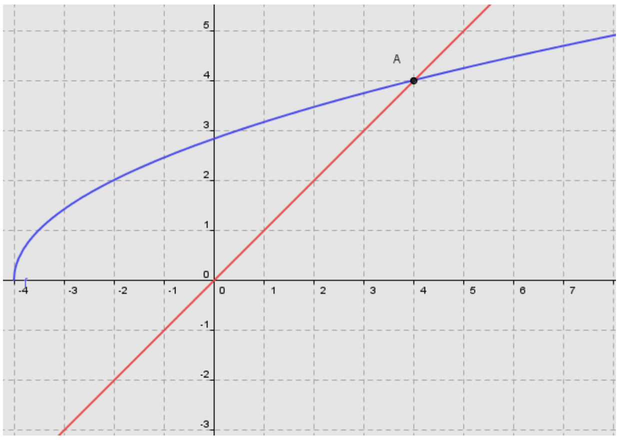
جدول تغيراتها

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$

2) تعيين نقطة تقاطع (Δ) و (C) : نحل المعادلة $x = \sqrt{2x+8}$ يكافئ $x^2 = 2x+8$ أي ان $x^2-2x-8=0$ نحسب المميز $\Delta = 36$ للمعادلة حلين $\begin{cases} x = 4 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}$ الحل المقبول هو $x=4$ و منه $A(4;4)$ نقطة التقاطع المطلوبة .

*****************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************

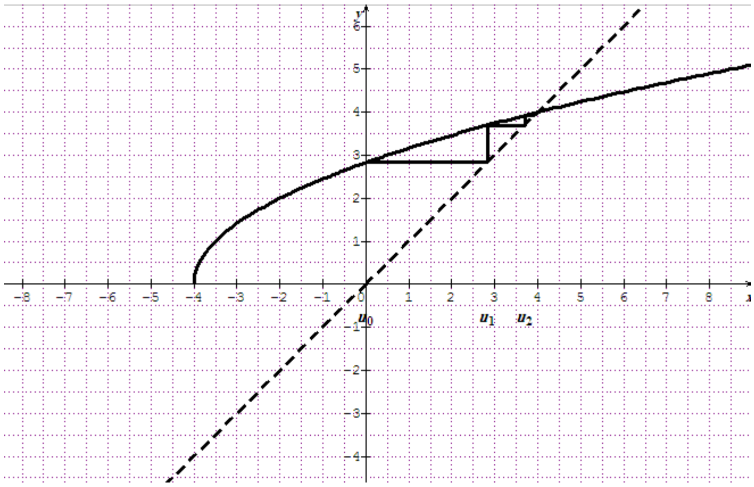
3) رسم المنحنى



.

الجزء الثاني :

1) تمثيل الحدود



2) التخمين نلاحظ من المثيل ان (u_n) المتتالية متزايدة و هي متقاربة نحو 4 فاصلة نقطة تقاطع (C) و المنصف الأول .

3) أ)البرهان بالتراجع : لدينا $0 \le u_0 \le 4$ محققة .

نفرض ان $0 \le u_n \le 4$ و لنبرهن $0 \le u_{n+1} \le 4$

$0 \le u_n \le 4$ يكافئ ان $f(0) \le f(u_n) \le f(4)$ لان الدالة f متزايدة على المجال $[0;4]$ و منه

$0 \le 2\sqrt{2} \le f(u_n) \le 4$ إذن $0 \le u_{n+1} \le 4$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \le u_n \le 4$.

ب)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $\frac{(4-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n} = \frac{2u_n+8-u_n^2}{\sqrt{2u_n+8}+u_n} = \frac{(\sqrt{2u_n+8}+u_n)(\sqrt{2u_n+8}-u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n} = \sqrt{2u_n+8} - u_n = u_{n+1} - u_n$ بما أن

$0 \le u_n \le 4$ فإن $u_{n+1} - u_n \ge 0$ إذن المتتالية متزايدة .

ج)لدينا $2\frac{4-u_n}{(4+\sqrt{2u_n+8})} = \frac{16-2u_n-8}{(4+\sqrt{2u_n+8})} = \frac{(4+\sqrt{2u_n+8})(4-\sqrt{2u_n+8})}{(4+\sqrt{2u_n+8})} = 4 - \sqrt{2u_n+8} = (4-u_{n+1})$ و منه

$(4-u_{n+1}) \le \frac{2}{4}(4-u_n)$ أي ان $(4-u_{n+1}) \le \frac{1}{2}(4-u_n)$ و هو المطلوب .

مما سبق نجد $\frac{1}{2^n}(4-u_0) \ge \cdots \ge \frac{1}{2^3}(4-u_{n-3}) \ge \frac{1}{2^2}(4-u_{n-2}) \ge \frac{1}{2}(4-u_{n-1}) \ge (4-u_n)$

أي أن $(4-u_n) \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$ أي $(4-u_n) \le \frac{4}{2^n}$ و هو المطلوب

د) حساب النهاية لدينا $0 \le (4-u_n) \le \frac{4}{2^n}$ بالمرور الى النهاية نجد $\lim_{n\to+\infty}(4-u_n) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{2^n}$ بما ان $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{2^n} = 0$ فإن

$\lim_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$ و منه نهاية المتتالية هي 4 .

التمرين الثالث :

1) حل $\mathbb{C}$ المعادلة $z' = z$ أي ان $\frac{z-2}{z-1} = z$ يكافئ $\begin{cases} z \neq i1 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $\begin{cases} z' = 1+i \\ z'' = 1-i \end{cases}$.

2) أ) الكتابة على الشكل الأسي $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$. ب) لدينا مما سبق $z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i} z_1$ و منه النقطة B صورة النقطة A بالدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و مركزه O .

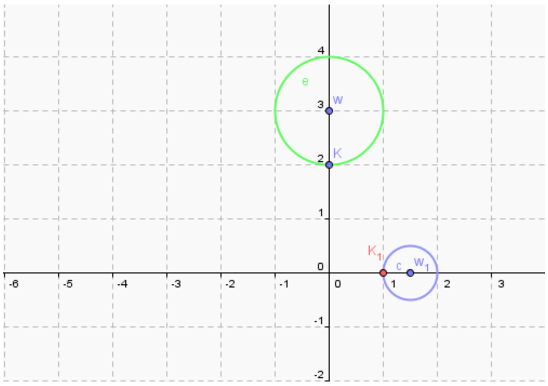
3) (Γ) مجموعة النقط M حيث M' أي أن z' عدد تخيلي صرف أي $\frac{z-2}{z-1}$ عدد تخيلي صرف نضع $z = x + iy$

لدينا $\frac{\bar{z}.z-2\bar{z}-z+2}{\bar{z}.z-\bar{z}-z+1} = \frac{(\bar{z}-1)(z-2)}{(\bar{z}-1)(z-1)} = \frac{z-2}{z-1}$ و منه $\frac{x^2+y^2-3x+2}{x^2+y^2-2x+1} + \frac{y}{x^2+y^2-2x+1}i = \frac{x^2+y^2-2x+2yi-x-iy+2}{x^2+y^2-2x+1} = \frac{z-2}{z-1}$ تخيلي صرف يعني $\begin{cases} x^2+y^2-3x+2=0 \\ x^2+y^2-2x+1 \neq 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ بإستثناء النقطة $K(1;0)$.

4) أ) تعيين طبيعة $S = hoR$ هو التشابه الذي مركزه O و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب) العبارة المركبة للتحويل $S = hoR$ هي $z' = 2e^{\frac{\pi}{2}i}z$ أي $z' = 2iz$.

ج)مجموعة النقط (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S هي عن دائرة مركزها ω' حيث $S(\omega) = \omega'$ و منه $\omega'(0;3)$ و نصف قطرها 1 بإستثناء النقطة $K'(0;2)$ (حيث $S(K) = K'$) .



التمرين الرابع :

الجزء الأول :

1) دراسة اتجاه تغير g لدينا المشتقة $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$ إشارتها من إشارة البسط

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$-$	0	$+$

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ و متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3+ln2}{2}$ و هو عدد موجب .و بما أن g متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ و متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ فإن $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ قيمة حدية صغرى إذن $g(x)$ موجبة على المجال $]0;+\infty[$.

******************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************

الجزء الثاني :

1) حساب النهايات $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{lnx}{x}+x-1\right] = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x \Rightarrow 0}} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{lnx}{x}-1\right] = -\infty$

2) أ) المشتقة على المجال$]0;+\infty[$ هي $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - lnx}{x^2} + 1 = \frac{x^2-1-lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب) جدول تغيراتها

بما ان $g(x)$ موجبة على المجال$]0;+\infty[$ فإن f متزايدة على هذا المجال

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ +

3) كتابة معادلة المماس (T) هي $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 2$

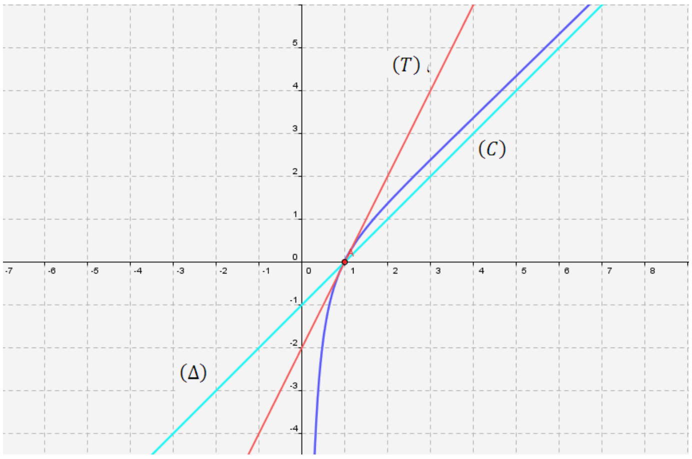
إذن المعادلة هي $y = 2x - 2$

4) أ) لدينا $\frac{lnx}{x} = f(x) - x + 1$ و نهاية الفرق عند $+\infty$ يساوي الصفر حسب التزايد المقارن و منه $y = x - 1$ معادلة المستقيم (Δ)المقارب المائل للمنحنى (C) ...

ب) درسة وضعية (C) و (Δ) لدينا $f(x) - y = \frac{lnx}{x}$ هذا الفرق موجب على المجال $]1;+\infty[$ و منه يكون (C) يقع فوق (Δ) على هذا المجال

و الفرق سالب على المجال $]0\,;1[$ و منه (C) يقع تحت (Δ) على هذا المجال.

5) رسن البيان و المستقيم المقارب و المماس



6) أ)النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى (Δ_m) يعني ان $0 = m(1) - m$ محققة (بتعويض إحداثيات A في المعدلة (Δ_m)).

ب)المناقشة بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$ المناقشة دائرية

لما $m \in]-\infty\,;1]$ نلاحظ ان المستقيم (Δ_m) و (C) يتقاطعان في نقطة و حيدة A إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو 1.

لما $m \in]1\,;2[$ نلاحظ ان المستقيم (Δ_m) و (C) يتقاطعان في نقطتان إذن المعادلة تقبل حلين .

لما $m = 2$ نلاحظ ان المستقيم (Δ_m) و (C) يتقاطعان في نقطة و حيدة A إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو 1

لما $m \in]2\,;+\infty[$ نلاحظ ان المستقيم (Δ_m) و (C) يتقاطعان في نقطتان إذن المعادلة تقبل حلين ..

7) أ- الدالة الأصلية لدالة $x \mapsto \frac{lnx}{x}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{(lnx)^2}{2}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب)حساب مساحة الحيز I_n :

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n\left[\frac{lnx}{x}+x-1\right]dx = \left[\frac{(lnx)^2}{2}+\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^n = \frac{(ln(n))^2}{2}+\frac{1}{2}n^2 - n + \frac{1}{2} \ ......$$

ج)لدينا $I_1 = 0$ و $I_2 = \frac{(ln2)^2}{2} + \frac{1}{2}$ و $I_3 = \frac{(ln3)^2}{2} + 2$ و منه $n_0 = 3$ و هي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث $I_n > 2$ لان $I_1 < 2$ و $I_2 < 2$ و $I_3 > 2$.

*****************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************

التصحيح المفصل لاختبار مادة الرياضيات بكالوريا 2016 شعبة علوم التجريبية

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ') و الذي يشمل A و شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;1;1)$ و هو $\begin{cases} x=-2t+5 \\ y=t-1 \\ z=t-2 \end{cases}$.

ب) المستقيم (Δ') شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;1;1)$ و المستقيم(Δ) شعاع توجيهه $\vec{v}(3;2;4)$

و نلاحظ أن$\vec{u}.\vec{v}=-6+2+4=0$ و منه $\vec{u}\perp\vec{v}$ و منه $(\Delta)\perp(\Delta')$.

$C\in(\Delta)$ تعني ان الجملة $\begin{cases} 1=1+3k \\ 1=1+2k \\ 0=4k \end{cases}$ حل وحيد k و منه $k=0$ محققة

$C\in(\Delta')$ تعني ان الجملة $\begin{cases} 1=-2t+5 \\ 1=t-1 \\ 0=t-2 \end{cases}$ حل وحيد t و منه $t=2$ محققة إذن C هي نقط تقاطعهما.

2) أ) الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظيمي على المستوي (P) المعين بالمستقيمين(Δ) و (Δ') يعني انه عمودي على شعاعي توجيهاهما

$\vec{n}.\vec{v}=2(3)+11(2)-7(4)=6+22-28=0$ و

$\vec{n}.\vec{u}=2(-2)+11(1)-7(1)=-4+11-7=0$ محققة .

ب)النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على (P) يعني أن الشعاع $\overrightarrow{BC}(-2\,;-11;7)$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ وهذا محقق لأن $\overrightarrow{BC}=-\vec{n}$.

3) أ) إثبات أن المجموعة (P') هي مستوي من الجملة نستنتج ان (P') معين بالشعاعين $\vec{v_1}(0;12;-6)$ و $\vec{v_2}(1;9;-11)$ و هما شعاعان غير مرتبطان خطيا لأن $\frac{12}{9}\neq\frac{-6}{-11}$ و يمر من النقطة $K(3;12;-7)$ فهو مستوي .التحقق من ان $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة (P') بتعويض الجملة في المعادلة الديكارتية نجد $13(3-\beta)-(12+12\alpha+9\beta)-2(-7-6\alpha-11\beta)-41=0$ و هي محققة .

ب) ايجاد نقطة تقاطع (P') مع (Δ) نعويض التمثيل الوسيطي للمستقيم في المعادلة الديكارتية للمستوي و نحاول إيجاد الوسيط

$13(1+3k)-(1+2k)-2(4k)-41=0$ و منه نجد $29k=29$ و منه $k=1$ و منه بالتويض في التمثيل الوسيطي نجد ان $D(4;3;4)$.

ايجاد نقطة تقاطع (P') مع (Δ') نعويض التمثيل الوسيطي للمستقيم في المعادلة الديكارتية للمستوي و نحاول إيجاد الوسيط

$13(-2t+5)-(t-1)-2(t-2)-41=0$ و منه نجد $-29t=29$ و منه $t=-1$ و منه بالتويض في التمثيل الوسيطي نجد ان $E(7;-2;-3)$.

ج)حساب حجم رباعي الوجوه $BCDE$ و هي $S=\frac{BC\times CD\times CE}{6}=\frac{\sqrt{174}.\sqrt{29}.\sqrt{54}}{6}=\frac{\sqrt{6\times29}.\sqrt{29}.\sqrt{9\times6}}{6}=\frac{6\times29\times3}{6}=87$

التمرين الثاني :

الجزء الأول :

1) أ) حساب النهاية

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x}=5$$

ب)دراسة اتجاه تغبر f المشتقة $f'(x)=\frac{10}{(x+2)^2}$ و هي موجبة على المجال $[0\,;+\infty[$ إذن f متزايدة على هذا المجال .

*****************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************

جدول تغيراتها

x	$0 \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 5$

2) نلاحظ من جدول تغيراتها ان 0 قيمة حدية صغرى و منه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,;+\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$.

الجزء الثاني :

1) أ) البرهان بالتراجع لدينا $1 \leq u_0 \leq 3$ محققة .

نفرض ان $1 \leq u_n \leq 3$ و لنبرهن ان $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

بما أن $1 \leq u_n \leq 3$ و f متزايدة على $[1;3]$ فإن $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$ أي ان $1 \leq \frac{5}{3} \leq f(u_n) \leq 5$

إذن $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \leq u_n \leq 3$.

ب)اتجاه تغير المتتالية (u_n) لدينا الفرق $u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n+2} - u_n = \frac{5u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2} = \frac{-u_n^2+3u_n}{u_n+2} = \frac{u_n.(-u_n+3)}{u_n+2}$ عدد موجب لان $1 \leq u_n \leq 3$ و منه المتتالية متزايدة و بما انها محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

2) أ) لدينا $v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\left(\frac{5u_n}{u_n+2}\right)} = 1 - \frac{3u_n+6}{5u_n} = \frac{2u_n-6}{5u_n} = \frac{2}{5}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) = \frac{2}{5}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} = 1 - 3 = -2$.

ب) عبارة الحد العام v_n هي $v_n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$. و لدينا $u_n = \frac{3}{1-v_n} = \frac{3}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

ج) حساب النهاية $lim(u_n) = 3$.

3) كتابة S_n لدينا $= \left(\frac{1-v_n}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1-v_1}{3}\right) + \left(\frac{1-v_0}{3}\right) = \frac{1}{u_n} + \cdots + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_0} = S_n$

أي ان $S_n = \frac{n+1}{3} - \frac{(v_0+v_1+\dots+v_n)}{3} = \frac{n+1}{3} + \frac{2\left(\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{2}{5}\right)-1}\right)}{3} = \frac{n+1}{3} + \frac{10\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1\right)}{9}$.

التمرين الثالث :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) = 0$ تكافئ $\begin{cases} z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0 \\ z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \end{cases}$

نحسب مميز المعادلة الثانية $\Delta = -1$ للمعادلة حلين هما $\begin{cases} z' = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ \text{و} \\ z'' = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$ ..

******************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************

2) الكتابة على الشكل الأسي $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ لدينا $|z_A| = 1$ و $\begin{cases} cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ و منه $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ و منه $z_A = e^{\frac{\pi}{6}i}$.

الكتابة على الشكل الأسي $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ لدينا $|z_B| = 1$ و $\begin{cases} cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ و منه $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ و منه $z_B = e^{\frac{5\pi}{6}i}$

الكتابة على الشكل الأسي $z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ لدينا $|z_C| = 1$ و $\begin{cases} cos\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ و منه $\theta_2 = \frac{7\pi}{6}$ و منه $z_C = e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

ب)نفرض ان S تشابه حيث عبارته المركبة $z' = az + b$ حيث $S(C) = A$, $S(B) = B$ أي ان $z_A = az_C + b$

و $z_B = az_B + b$ و منه $a = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}}{-i} = i\sqrt{2}$

و $b = z_B - az_B = z_B(1-a) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{6}}{2}$ و منه

$z' = i\sqrt{2}z + \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{6}}{2}$ إذن S هو التشابه الذي نسبته $|i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ و زاويته $arg(i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$ و مركزه B.

3) أ) يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع يعني ان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي أن $z_B - z_A = z_C - z_D$

و منه $z_D = -z_B + z_A + z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ اي $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

ب)تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ و هذا يكافئ $|z - z_A| = |z - \overline{z_B}|$ لأن $|\bar{z} - z_B| = |\overline{\bar{z} - z_B}|$

أي ان $|z - z_A| = |z - z_C|$ و هذا يعني $AM = CM$ و منه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$

ج)تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$ يكافئ $z - z_B = \sqrt{3}e^{i\theta}$

هذا يعني أن $|z - z_B| = \sqrt{3}$ أي ان $BM = \sqrt{3}$ مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

لدينا $BA = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ و منه A نقطة من (Γ) .

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

1) أ) حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = \lim_{x\to-\infty} [1 + x^2e^{-x}] = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = \lim_{x\to+\infty} [1 + x^2e^{-x}] = 1$$

حسب التزايد المقارن .

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة g . المشتقة $g'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^x$ *إشارتها من*

إشارة $(-x^2 + x + 2)$ *و هذه العبارة تنعدم عند العددين* -1 و 2 و منه

جدول الاشارة هو

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

و منه g متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[2; +\infty[$ و متزايدة على المجال $[-1; 2]$.

******************************الأستاذ: جوالبل أحمد **********************

جدول تغيراتها

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$1+5e^{-2}$	$\searrow$	1

2) أ) لدينا $g(-1{,}52) = 0{,}041662$ و $g(-1{,}51) = -0{,}0407$ و الدالة مستمرة على المجال $]-1{,}52;-1{,}51[$ و متناقصة على هذا المجال فحسب نظرية القين المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا و حيد α من هذا المجال و لدينا $g(0) = 0$ و منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين إحداهما معدوم والأخر α و لا يوجد مجال أخر تغير فيه الدالة g إشارتها .

ب)من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

1) أ) حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [-x + (x^2+3x+2)e^{-x}] = \lim_{x\to+\infty} [-x + \overset{0}{x^2e^{-x}}] = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [-x + (x^2+3x+2)e^{-x}] = \lim_{x\to-\infty} x[-1 + \overset{+\infty}{xe^{-x}}] = +\infty$$

حسب التزايد المقارن

ب) حساب المشتقة $f'(x) = -1 + (2x+3)e^{-x} - (x^2+3x+2)\, e^{-x} = -1 - (x^2+x-1)\, e^{-x} = -g(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0{,}38$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

د)تعيين

$$\lim_{h\to0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = 0$$

وذالك من جدول تغيرات الدالة f وهذا يعني أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α موازي لحامل محور الفواصل و هو التفسير الهندسي .

2) أ) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)+x] = \lim_{x\to+\infty} (x^2+3x+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

حسب التزايد المقارن . و منه $y = -x$ معادلة المستقيم (Δ) المقارب جهة $+\infty$....

ب) دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) + x = (x^2+3x+2)e^{-x}$ و إشارتها من إشارة x^2+3x+2 و التي تنعدم عند العددين -1 , -2 .

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)+x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		يقع (C_f) فوق (Δ)	(Δ) يقطع (C_f)	يقع (C_f) تحت (Δ)	(Δ) يقطع (C_f)	يقع (C_f) فوق (Δ)	

******************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************

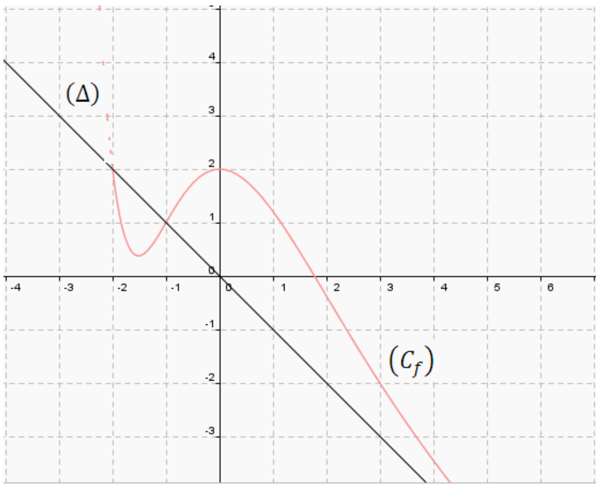
ج) لدينا $f'(x) = -g(x)$ و منه $f''(x) = -g'(x) = -(-x^2+x+2)e^x = (x^2-x-2)e^x$ و منه f'' تنعدم عند العددين -1 و 2 و اشارتها كما يلي

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه المنحنى (C_f) ةيقبل نقطتي إنعطاف فاصلتاهما -1 و 2 . لأن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العددين السابقين

و هما $A(-1\,;1)$ و $B(2\,;-2+12e^{-2})$.

د) رسم المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب (Δ)



هـ) المناقشة بيانيا حسب قيم m لعدد و اشارة حلول المعادلة

$(m-x)e^x + (x^2+3x+2) = 0$ يكافئ $-m = -x + (x^2+3x+2)e^{-x}$ و يكافئ $-m = f(x)$ حلها بيانيا يعني ايجاد فواصل نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ و المنحنى (C_f) .

لما $m \in]-f(\alpha);+\infty[$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها موجبة و منه المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $m = -f(\alpha)$ *فإن* (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين نقطة فاصلتها موجبة و الأخر فاصلتها سالبة و منه المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

لما $m \in]-2;\ -f(\alpha)[$ *فإن* (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبان الآخرة فاصلتها سالبة و منه المعادلة تقبل ثلاثة حلول خلين سالبين و حل موجب .

لما $m = -2$ *فإن* (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين احدهما فاصلته معدومة و الآخرة فاصلتها سالبة و منه المعادلة تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $m \in]-\infty;\ -2[$ *فإن* (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه المعادلة لا تقبل حلول.

الجزء الثالث :

1) تعيين الأعداد $a\,; b\,; c$ حتى تكون H دالة أصلية لدالة h حيث $H(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ و $h(x) = x + f(x)$
نحسب مشتقة H
هي $H'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} = x + [-x + (-ax^2 + (2a-b)x + b-c)e^{-x}]$

$h(x) = x + [-x + (x^2+3x+2)e^{-x}]$ بالمطابقة نجد $\begin{cases} -a = 1 \\ (2a-b) = 3 \\ b-c = 2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = -7 \end{cases}$

و منه $H(x) = (-x^2-5x-7)e^{-x}$ ....

1) أ) حساب التكامل التالي $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x)dx = [(-x^2-5x-7)e^{-x}]_0^\lambda = (-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda} + 7$ ... و تفسيرها الهندسي و هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = \lambda$.

ب) حساب النهاية $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda} + 7\right] = 7$

****************************الأستاذ: جواليل أحمد**********************