الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

اختبار في مادة الرياضيات

لشعبتي الرياضيات و التقني الرياضي
المدة: 4 ساعات

<u>التمرين الأول</u> : العلامة (06 نقاط) .

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ ، C_f تمثيل بيانها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،لدينا:
$\sqrt{1+x^2}-x>0$،$\sqrt{1+x^2}+x>0$،$2\sqrt{1+x^2}-x>0$.

2) أ - احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f ؟

ب – احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f ؟

جـ - ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D الذي معادلته $y=x$ و بالنسبة إلى المستقيم D' الذي معادلته $y=-3x$.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$.

أ - اثبت أن الدالة g متزايدة تماما على$\mathbb{R}$.

ب – حل في$\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$.

جـ - عين إشارة $g(x)$.

4) أ- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب – بين أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

جـ - شكل جدول تغيرات f .

5) ارسم المستقيمين D وD' والمنحنى C_f .

<u>التمرين الثاني</u> : العلامة (04 نقاط) .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+i\sqrt{3}z-i=0........(E)$

2) ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $[0;\frac{\pi}{2}]$ ، نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E') :

$z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0.........(E')$.

أ - تحقق أن : $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

ب – حل في C المعادلة (E') .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$.، نعتبر النقط Aو B و C التي لواحقها i ، $\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ و $-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$ على الترتيب .

أ- عين العدد θ حتى تكون A و B و C على استقامة واحدة .
ب- عين العدد θ حتى تنتمي النقطتان B و C إلى دائرة مركزها النقطة O. ما هو نصف قطر الدائرة ؟

<u>التمرين الثالث</u> : العلامة (03 نقاط) .

I) c_1 و c_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب c_1 الأعداد : 0،0،$\frac{\pi}{3}$،$\frac{\pi}{3}$،$\frac{4\pi}{3}$،$\frac{4\pi}{3}$ و تحمل أوجه المكعب c_2 الأعداد : 0،0،$\frac{\pi}{6}$،$\frac{\pi}{6}$،$\frac{\pi}{2}$،$\frac{\pi}{2}$.

نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ c_1 و c_2 . نرمز لهذين العددين بـ α و β .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ر مية العدد $\sin(\alpha+\beta)$.

1) ماهي القيم الممكنة للمتغير X ؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول) .
2) عيّن قانون احتمال X .
3) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(x)$ للمتغير العشوائي X .

Π) نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص ما $100\ DA$ عندما يرمي حجري النرد ويتحصل على $\sin(\alpha+\beta)=1$ أو $\sin(\alpha+\beta)=-1$ ، ويخسر $50\ DA$ في باقي الحالات .

1) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .
1) عيّن قانون احتمال Y .
2) نرمي حجري النرد 5 مرات . ما هو الاحتمال أن يربح اللاعب $300\ DA$ ؟

<u>التمرين الرابع</u> : العلامة (03 نقاط) .

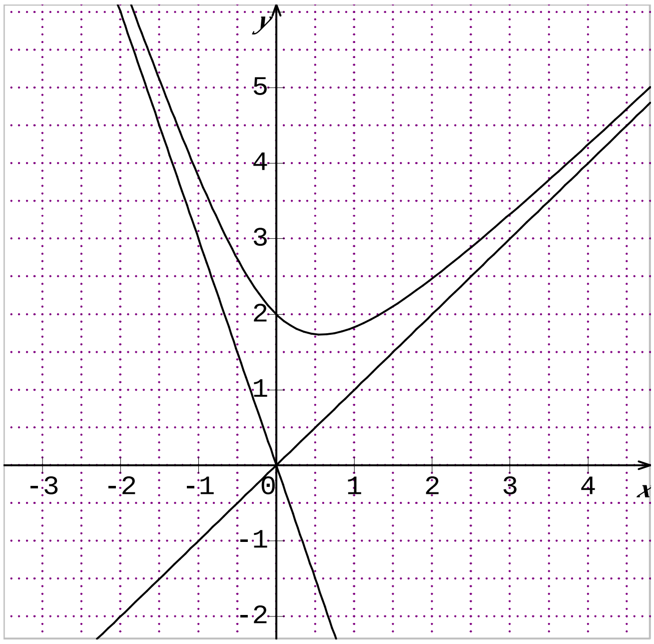
أسطوانة شفافة نصف قطرها يساوي تقريبا $10cm$ بتقريب 10^{-1} بها ماء إرتفاعه $4cm$. وعنا داخل الأسطوانة كرة فارتفع منسوب الماء وأصبح مماسا للكرة . (انظر الشكل)
احسب نصف قطر الكرة ، ثم أعط قيمة مقربة لحجمها بتقريب 10^{-2} .

<u>التمرين الخامس</u> : العلامة (04 نقاط) .

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ المعادلة : $11n-24m=1$............(1)
أ- برر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .
ب- باستخدام خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (1) .
جـ- عين مجموعة حلول المعادلة (1) .
2) أ- بين أن 9 يقسم $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.
ب- بين أنه مهما يكن الحل $(m;n)$ فإن : $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$.
جـ- بين أن : $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$.
استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث $(10^{11n}-1)N-(10^{24m}-1)M=9$.
د- بين ان كل قاسم مشترك لـ $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$ يقسم كذلك 9 .
هـ- استنتج مما سبق $p\gcd(10^{11}-1;10^{24}-1)$.

الحل النموذجي و سلم التنقيط لشعبتي الرياضيات و التقني الرياضي

الإجابـــــــــــــــــــــــة	سلم التنقيط
التمرين الأول (06 نقاط)	
1)- من أجل x سالب : $\sqrt{1+x^2}$ موجب و $-x$ موجب مما يؤدي إلى $\sqrt{1+x^2}-x>0$	0.25
من أجل x موجب : $1+x^2>x^2$ نجذر الطرفين $\sqrt{1+x^2}>x$ .... ومنه : $\sqrt{1+x^2}-x>0$	0.25
- من أجل x موجب : $\sqrt{1+x^2}$ موجب و x موجب مما يؤدي أن $\sqrt{1+x^2}+x$ موجب	0.25
من أجل x سالب : $1+x^2>x^2$ ، نجذر الطرفين $\sqrt{1+x^2}>-x$ .... و منه : $\sqrt{1+x^2}+x>0$	0.25
- لدينا : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ ، بإضافة العبارة $\sqrt{1+x^2}$ الموجبة تماما إلى طرف الأيسرمن المتراجحة فينتج : $2\sqrt{1+x^2}-x>0$	0.25
2) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2(\sqrt{1+x^2}-x)$ .... $\lim\limits_{x\to+\infty}(2(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=0$ نستنتج أن المستقيم D الذي معادلته : $y=x$ مقارب مائل C_f .	3×0.25
ب- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)=0$ .... نستنتج أن المستقيم D' الذي معادلته : $y=-3x$ مقارب مائل لـ C_f .	2×0.25
ج - لدراسة الوضعية النسبية ندرس إشارة $f(x)-x$. $f(x)-x=2(\sqrt{1+x^2}-x)$ ، هذه العبارة موجبة تماما حسب (1) . ... إذن C_f فوق D.	0.25
- $f(x)+x=2(\sqrt{1+x^2}+x)$ ، هذه العبارة موجبة تماما حسب (1) . ... إذن C_f فوق D'.	0.25.
3) أ- من أجل كل عدد حقيقي x $g'(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$	
إشارة الدالة المشتقة من إشارة دالة البسط ، و دالة البسط $2\sqrt{1+x^2}-x$ موجبة تماما إذن الدالة g متزايدة	0.25
ب- $g(x)=0$ معناها $2x-\sqrt{1+x^2}=0$ .... معناها $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0.25

العلامة	عناصر الإجابة
2×0.25	ج - إشارة $g(x)$: من أجل $x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$ فإن $g(x) \ge 0$ ....
0.5	من أجل $x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ فإن $g(x) \le 0$
0.25	4) أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ....
0.5	ب- من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ ....
	ج. جدول التغيرات ....
0.75	د- الرسم  ....

العلامة	عناصر الإجابة
	<u>التمرين الثاني</u> : العلامة (04 نقاط) .
2×0.5	1) $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$ ....
2×0.5	$z_1 = \frac{1+i(2-\sqrt{3})}{2} ; z_2 = \frac{-1-i(2+\sqrt{3})}{2}$ ....
0.25	2) أ- التحقق : $(\cos\theta + i)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta - 1 = (1-\sin^2\theta) + 2i\cos\theta - 1$ ......
0.25	$(1-\sin^2\theta) + 2i\cos\theta - 1 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$ ....

2×0.25	ب- $z'_1=\cos\theta+i(1-\sin\theta);\ z'_2=-\cos\theta-i(\sin\theta+1)$ ....
0.5	3) أ - $\theta=\frac{\pi}{2}$ ....
0.5	ب- $\theta=0$ ، نصف قطر الدائرة : $r=\sqrt{2}$ ....

التمرين الثالث : العلامة (03 نقاط) .

I) 1-

	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$4\frac{\pi}{3}$	$4\frac{\pi}{3}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$

0.5

2)

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

0.5

0.5	3) $E(X)=\frac{1}{6}$ ....
0.5	$\sigma(X)=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ....

II) 1-

x_i	-50	100
$p(X=x_i)$	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

0.5

0.5	2) نتعرف هنا على الثنائي $p(Y=3)=C_5^3\left(\frac{3}{9}\right)^3\left(\frac{6}{9}\right)^2=\frac{40}{243}$ ....

التمرين الرابع : العلامة (03 نقاط) .

اختيار المجهول مثلا : r

معرفة العلاقة بين ارتفاع الماء في الحالة الأولى و الحالة الثانية

معرفة العلاقة بين حجم الماء المرتفع و حجم الكرة

معرفة العلاقة التي تعطي حجم الكرة

0.5	**التمرين الخامس : العلامة (04 نقاط) .**

اعتبار حجم الكرة دالة
تعيين مجال الدراسة
تعيين مجالي r وتعيين حصرا لـ r في الحالتين
نقيم انطلاقا من المعايير الأربعة و مؤشراتها .

الحل

0.75 .... $\begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 = 25\pi(2r-4) \\ 2r^3 = 75r - 150 \\ 2r^3 - 75r + 150 = 0 \\ f(r) = 2r^3 - 75r + 150 \end{cases}$

0.25 مجال الدالة : $[\ 0;5\ ]$ ....

0.25 من أجل كل r من المجال $[\ 0;5\ ]$: $f'(r) = 6r^2 - 75$ ....

جدول التغيرات

0.25

r	0		$\frac{5\sqrt{2}}{2}$		5
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	150	$\searrow$	$f(\frac{5\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	25

$f(\frac{5\sqrt{2}}{2}) \approx -26.78$

0.25 $f(3) = -21$ و $f(2) = 16$ يوجد r_1 من $]2;3[$ بحيث $f(r_1) = 0$ ....

0.25 نحسب قيمة مقربة لـ r_1 وذلك بتجزئة المجال $]2;3[$ فنحصل على $r_1 \approx 2.34$ ....

0.25 $f(4) = -22$ و $f(5) = 25$ يوجد r_2 من $]4;5[$ بحيث $f(r_2) = 0$ ....

0.25 نحسب قيمة مقربة لـ r_1 وذلك بتجزئة المجال $]2;3[$ فنحصل على $r_2 \approx 4.61$ ....

2×0.25 $V_1 = 53.67$ $V_2 = 410.38$ ....

	1) أ- لدينا $p\gcd(11;24)=1$ إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u,v بحيث $11u+24v=1$.
	يكفي أن نضع $n=u$ و $m=v$.
	ب- باستخدام خوارزمية إقليدس
0.25	$24=11\times2+2$ $11=2\times5+1$ ....
	إذن :
0.25	$1=11-2\times5$ $1=11-(24-11\times2)\times5$ .... $1=11\times11-24\times5$
0.25	الحل الخاص هو : $(5;11)$ ....
	جـ - لدينا $11n-24m=1$ $11\times11-24\times5=1$
	بالطرح طرفا من طرف نجد : $11(n-11)-24(m-24)=0$ $11(n-11)=24(m-24)$
0.5 0.25	بتطبيق مبرهنة غوص نجد : $S=\{(11k+5;24k+11);k\in Z\}$ ....
0.25	2) أ – لدينا $10\equiv1[9]$ إذن $10^{11}\equiv1[9]$ و منه $10^{11}-1\equiv0[9]$ أي 9 يقسم $10^{11}-1$..........
	وبنفس الطريقة نبين أن : 9 يقسم $10^{24}-1$...
	ب – بتعويض $24m=11n-1$ في العبارة
025.	$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=(10^{11n}-1)-10(10^{11n-1}-1)=10^{11n}-1-10^{11n}+10=9$
	جـ - حسب الخاصية : $1+x+x^2+...+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1};x\neq1$ ويوضع $x=10^{11}$ نتحصل على
0.25×2	$10^{11n}-1=(10^{11}-1)(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1})$............................ إذن $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$ $N=(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1})$ و $M=10(1+10^{24}+(10^{24})^2+...+(10^{24})^{m-1})$..
	د – ليكن d قاسما مشتركا لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$
0.25	إذن : $10^{11}-1=k'd$ و $10^{24}-1=k''d$ و حسب (د) وبالتعويض نجد $k'dN-k''dM=9$ إي $d(k'N-k''M)=9$ ....
	ومنه d يقسم 9.
0.25	هـ - حسب السؤال السابق d يقسم 9 إذن $d\in\{1;3;9\}$ وحسب (أ) لدينا d قاسم مشترك لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$..
0.5	إذن : $p\gcd(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$ ....

ملاحظة : تلقيت الفاكس يوم 07/11/10 لهذا فأنني لم أتمكن من إنجاز كل المواضيع و اكتفيت فقط بثلاث شعب وهي العلوم التجريبية و الرياضيات و التقني الرياضي . سأحاول لاحقا إنجاز الموضوعين المتبقين وإرسالها
في أقرب وقت .

مفتش التربية و التكوين