ثانوية بنر مقدم | السنة الدراسية : 2008/2007

المستوى : نهائي علوم تجريبية | المـــدة : 3 ساعــات

*** اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات ***

التمرين ❶ : (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ دون تبرير

1) f دالة مستمرة على المجال [0 , 1] وتأخذ قيمها في $\mathbf{R}$.

أ. إذا كان $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$ فإنه يوجد على الأقل $0 < \alpha < 1$ بحيث $f(\alpha) = 0$

ب. إذا كانت f متزايدة تماما على المجال [0 , 1] إذن من أجل كل $y \in [f(0) , f(1)]$ يوجد على الأقل عنصر وحيد $x \in [0 , 1]$ ، $y = f(x)$.

ج. إذا كان $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ فإنه من أجل كل $x \in [0 , 1]$ ، $f(x) = x$.

د. إذا كانت f قابلة للإشتقاق على المجال [0 , 1] مع $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ فإنه من أجل كل $x \in [0 , 1]$ ، $f'(x) \geq 0$.

2) f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbf{R}$ ، نرمز بـ (C_f) لمنحناها البياني في معلم متعامد ، وليكن $(T_1) : y = 2 - x$ مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_1 = -1$

و $(T_2) : y = 2x + 1$ مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_2 = 1$

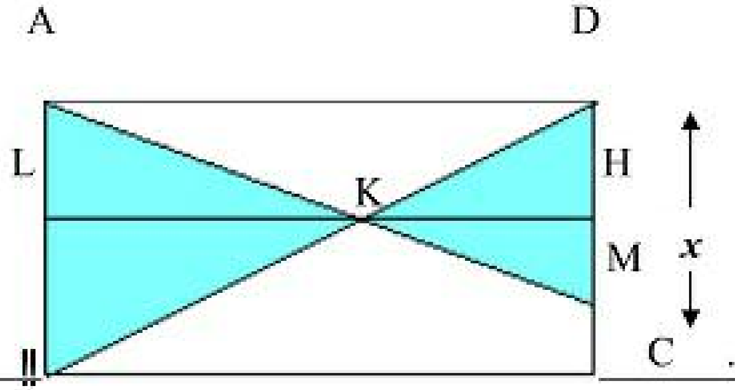
أ. $f(-1) = 1$.

ب. f دالة فردية .

التمرين ❷ : (04 نقاط)

لفلاح قطعة أرض على مستطيل ABCD أبعادها بالكيلومتر $AB = 1$ ، $AD = 2$ ، وقد رزق هذا الفلاح ببنت وولد فأراد أن يقسم الأرض بينهما على أن يعطي البنت المساحة الملونة على أن تكون أصغر ما يمكن ، فاعتبر M نقطة متغيرة من [DC] حيث $DM = x$ واعتبر تقاطع القطعة [AM] والقطر [BD] هو النقطة K التي مسقطاها العموديين على [CD] و [AB] هما H و L على الترتيب .

نفرض أن $KH = h$.



1) عين مجال تغير x .

2) عبر عن h بدلالة x .

3) ساعد هذا الفلاح في تحقيق رغبته .

التمرين ❸ : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{u_n+6}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 < u_n < 1$

2) بين أن (u_n) متزايدة تماما .

3) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbf{N}$ بـ $v_n = \frac{u_n \quad 1}{u_n+3}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية .

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n أيضا .

ج) أدرس تقارب (u_n) .

مسألة : (08 نقاط)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بـ $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O , I , J)

1) عين العدد a بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f(x) = a\,x + \frac{x+1}{x^2}$

2) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x) = \frac{(x+1)(\ x^2+x \quad 2)}{x^3}$

3) أدرس تغيرات الدالة f

4) برهن أن المستقيم $(\Delta) : y = -x$ مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس وضعية (C_f) و (Δ)

5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $1 < \alpha < 2$ ثم أعط حصرا للعدد α سعته 10^{-1}

6) أنشئ (C_f) في المعلم (O , I , J)

7) نعتبر الدالة g حيث $g(x) = |f(x)|$

أ) أكتب g دون قيمة مطلقة

ب) بين أن g غير قابلة للإشتقاق عند $x_0 = \alpha$ " حيث α هو العدد المشار إليه في السؤال5 "

* فسر ذلك هندسيا

ج) بالاستعانة بالمنحني (C_f) أنشئ (C_g) منحنى الدالة g في معلم آخر .

انتهـــــى

بالتوفيق والنجاح | أساتذة المادة : حميدان و عبيد

التصحيح	التنقيط

التمرين ❶ :

1) أ/ صحيح ، ب/ خاطئ ، ج/ خاطئ ، د / خاطئ 02

2) أ/ خاطئ ، خاطئ 02

التمرين ❷ : (شبكة تصحيح حسب المعايير)

1) مجال تغير x هو [0 , 1]

2) التعبير عن h بدلالة x :

باستخدام نظرية طاليس لدينا : $\frac{DK}{KB} = \frac{HK}{KL} = \frac{x}{1}$

ومنه $h = \frac{2x}{x+1}$

3) مساعدة الفلاح في تحقيق رغبته :

المساحة التي ستعطى للبنت هي مجموع مساحتي المثلثين : KDM و AKB ، ولتكن $S(x)$.

$$S(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

أي أن أصغر مساحة هي القيمة الحدية الصغرى للدالة S على المجال [0 , 1] .

$$S'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

x	$-1+\sqrt{2}$ 0				1
$S'(x)$		-	0	+	
$S(x)$	1	↘	$-2+2\sqrt{2}$	↗	1

نلاحظ من جدول التغيرات أن القيمة الحدية للدالة S على المجال [0 , 1] هي : $-2+2\sqrt{2}$ عند $x_0 = -1+\sqrt{2}$

إذن لابد على هذا الفلاح اختيار $x = -1+\sqrt{2}$ ليعطي البنت أصغر مساحة من الأرض وهي : $S_F = -2+2\sqrt{2}\,km^2$

التمرين ❸ :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-3 < U_n < 1$

نستخدم البرهان بالتراجع

أ/ من أجل n = 0 ، لدينا : $U_0 = -1$ أي : $-3 < U_0 < 1$

ب/ فرض صحة الخاصية من أجل n أي نفرض $-3 < U_n < 1$

ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي نبرهن $-3 < U_{n+1} < 1$

لدينا : $-3 < U_n < 1$ أي $3 < U_n + 6 < 7$ (المقام > 0)

ولدينا : $U_n < 1$ يعني $3U_n + 3 < 6$

أي أن : $4U_n + 3 < U_n + 6$ أي $\frac{4U_n+3}{U_n+6} < 1$

ومنه $U_{n+1} < 1$ ... (1)

لدينا $-3 < U_n$ يعني $-21 < 7U_n$

أي أن : $-3(U_n + 6) < 4U_n + 3$ أي $-3 < \frac{4U_n+3}{U_n+6}$

ومنه $-3 < U_{n+1}$ ... (2)

من (1) و (2) فإن $-3 < U_{n+1} < 1$

من أ/ ، ب/ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 < U_n < 1$ 01

2) إثبات أن (U_n) متزايدة : $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n + 6}$

وإشارته من إشارة البسط

U_n	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-U_n^2-2U_n+3$		-	0	+	0	-	
$U_{n+1}-U_n$		-	0	+	0	-	

وبما أن $-3 < U_n < 1$ فإن $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة تماما 01

3) أ/ إثبات أن (V_n) متتالية هندسية : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $V_{n+1} = \frac{3}{7}V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $Q = \frac{3}{7}$. 0,5

ب/ * التعبير عن V_n بدلالة n : $V_n = -\left(\frac{3}{7}\right)^n$ 0,25

* التعبير عن U_n بدلالة n : $U_n = \frac{1+3V_n}{1-V_n}$

ومنه : $U_n = \frac{1-3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}$ 0,5

ج/ دراسة تقارب (U_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}\right) = 1$$ 0,75

ومنه (U_n) متقاربة نحو العدد 1 .

المسألة :

1) تعيين العدد a : $a = -1$ أي $f(x) = -x + \frac{x+1}{x^2}$ 0,25

2) إثبات أنه على R* : $f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2+x+1)}{x^3}$ 0,25

3) دراسة تغيرات f :

* مجموعة التعريف : $Df =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ 0,25

* النهايات : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to 0^<} f(x) = +\infty$ 01

$\lim_{x\to 0^>} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

* اتجاه التغير : من أجل كل x من R* :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2+x+1)}{x^3}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+	
$-x^2+x-2$		-		-		-	
x^3		-		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	‖	-	

01

ومنه f متزايدة تماما على] -1 , 0 [

و f متناقصة تماما على] - ∞ , -1] ∪] 0 , + ∞ [

التصحيح	التنقيط

* جدول التغيرات :

01

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		1	↗ $+\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) * إثبات أن $y = -x$: (Δ) مقارب لـ (C_f)

0,25

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)=0$$

ومنه $y = -x$: (Δ) مقارب لـ (C_f)

* دراسة وضعية (C_f) و (Δ) :

$(f(x)+x)=0$ يكافئ $\frac{x+1}{x^2}=0$

0,5

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)+x$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
وضعية (C_f) و (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	$\Vert$	(C_f) فوق (Δ)	

5) * تبيين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها $1 < \alpha < 2$:

0,25

نلاحظ من جدول التغيرات أن f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1 , 2]$ وأيضا $f(1) \times f(2) < 0$

ومنه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها $1 < \alpha < 2$.

* إعطاء حصر لـ α سعته 10^{-1} :

ليكن m_1 الوسط الحسابي للقيمتين 2 و 1 :

$m_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ولدينا : $f(m_1) < 0$

ومنه $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

$m_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ ولدينا : $f(m_2) > 0$

ومنه $\frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$

$m_3 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8}$ ولدينا : $f(m_3) < 0$

ومنه $\frac{5}{4} < \alpha < \frac{11}{8}$

لدينا $m_4 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{11}{8}}{2} = \frac{21}{16}$: $f(m_4) > 0$

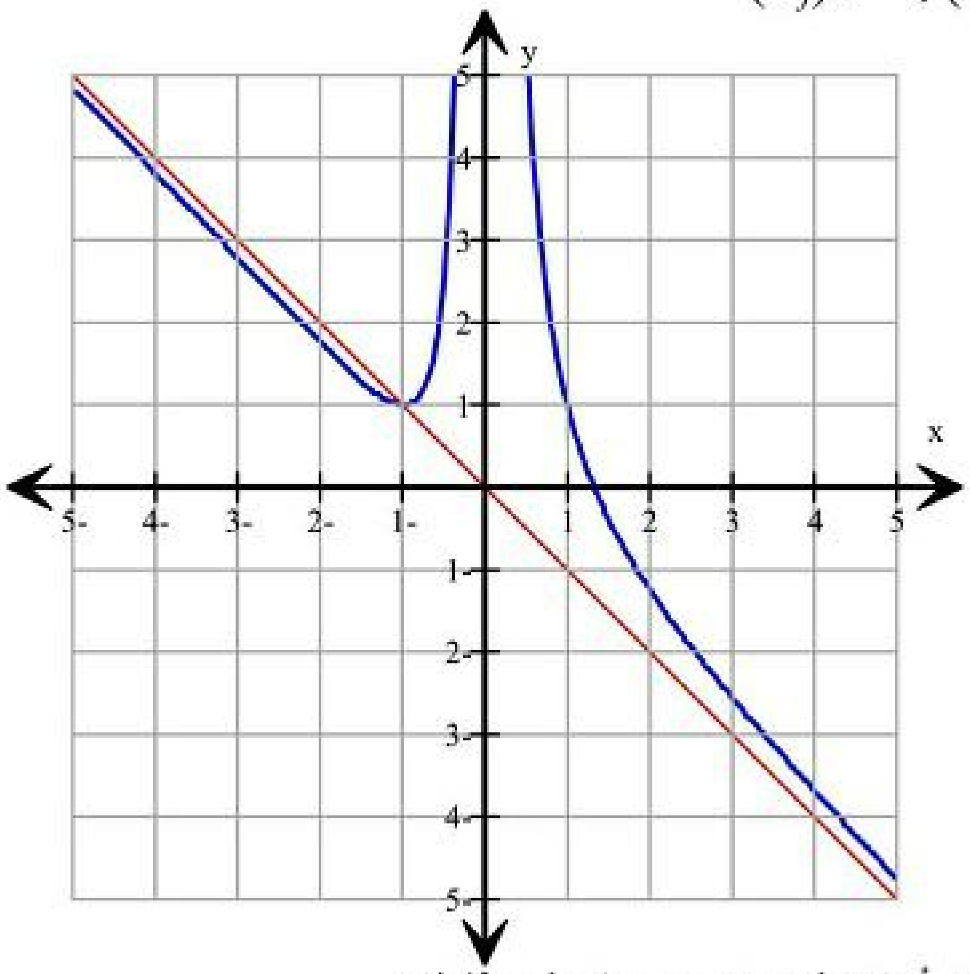
التصحيح	التنقيط

ومنه $\frac{21}{16} < \alpha < \frac{11}{8}$ 0,75

الخلاصة : **$1,3 < \alpha < 1,4$**

6) إنشاء (C_f)

01



7) أ/ كتابة $g(x)$ دون قيمة مطلقة :

0,25

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\alpha\right] \\ -f(x) & x\in\left]\alpha,+\infty\right[\end{cases}$$

ب/ * تبيين أن g غير قابلة للإشتقاق عند $x_0 = \alpha$.

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\alpha\right[\\ -f'(x) & x\in\left]\alpha,+\infty\right[\end{cases}$$

و $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ <}} g'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ <}} f'(x)=\frac{(\alpha+1)(-\alpha^2+\alpha-2)}{\alpha^3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ >}} g'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ >}}[-f'(x)]=-\frac{(\alpha+1)(-\alpha^2+\alpha-2)}{\alpha^3}$

0,5

و $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ <}} g'(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ >}} g'(x)$

إذن g غير قابلة للإشتقاق عند $x_0 = \alpha$.

0,25

* التفسير الهندسي : منحنى الدالة g يقبل نصفي مماس عند النقطة $(\alpha , 0)$

ج/ رسم (C_g) : (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال : $\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\alpha\right]$ و (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $\left]\alpha,+\infty\right[$

0,5