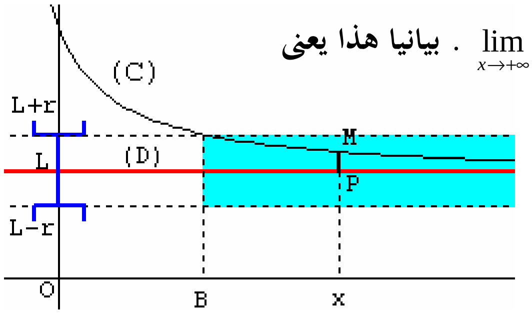
النهايات

I. النهايات في اللانهاية و المستقيمات المقاربة :

1. نهاية منتهية عند $+\infty$

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$ و l عدد حقيقي.
القول أن $f(x)$ ينتهي إلى l عندما x ينتهي إلى $+\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل كل قيم x الكبيرة . و نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$



ملاحظات : 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-l)=0$. بيانيا هذا يعني أن عندما x ينتهي إلى $+\infty$ ، البعد MP ينتهي إلى **0**.
المستقيم ذو المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$

2 . نتحصل على تعريف و نتيجة مماثلة عند $-\infty$.

3 . الدوال المرجعية :

من أجل كل عدد طبيعي الغير المعدوم n لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0$

2. الخط المقارب المائل:

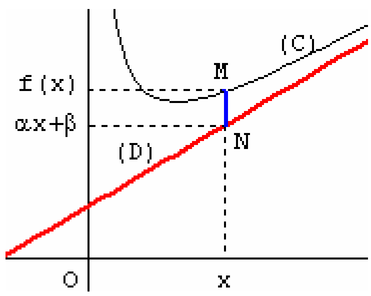
تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$.
إذا وجد عددين حقيقيين α و β و دالة h حيث على هذا المجال يمكن كتابة :

$$f(x)=\alpha x+\beta+h(x) \text{ و } \lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

فإن نقول أن المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=\alpha x+\beta$
مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$

$$MN=|f(x)-(\alpha x+\beta)|=|h(x)|$$

عندما x ينتهي إلى $+\infty$ ، البعد MN ينتهي إلى **0**.

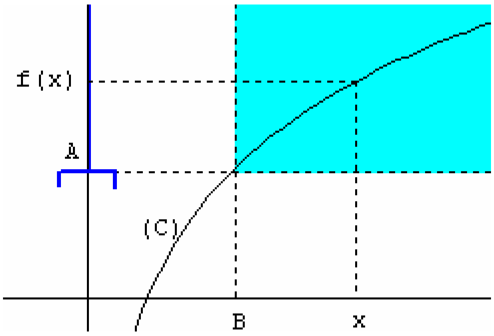


ملاحظة: لمعرفة الوضعية النسبية لـــ (C) بالنسبة لـــ (D)
يجب معرفة إشارة الفرق :

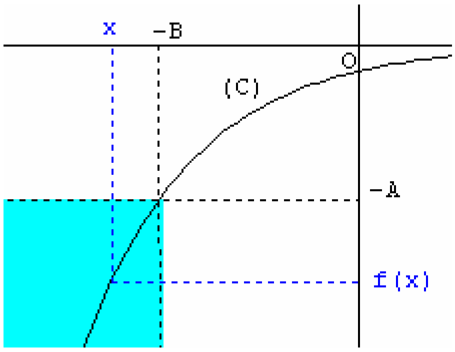
$$f(x)-(\alpha x+\beta)=h(x)$$

3. نهاية الغير المنتهية عند $+\infty$

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$. A و A' عددين حقيقيين
القول أن $f(x)$ ينتهي إلى $+\infty$، $(-\infty)$ عندما x ينتهي إلى $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل
$]A\,;+\infty[$ ، $(]-\infty\,;A'[)$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل كل قيم x الكبيرة .
و نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\right)$



ملاحظات : نعرف بطريقة مماثلة النهايات الغير المنتهية عند $-\infty$
.



الدوال المرجعية:

من أجل كل عدد طبيعي الغير المعدوم n لدينا:

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^n\right)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)=+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right)=+\infty$ إذا كان n زوجي

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right)=-\infty$ إذا كان n فردي

حذاري: الدوال sin و cos لاتقبل نهاية عند $+\infty$ و $-\infty$

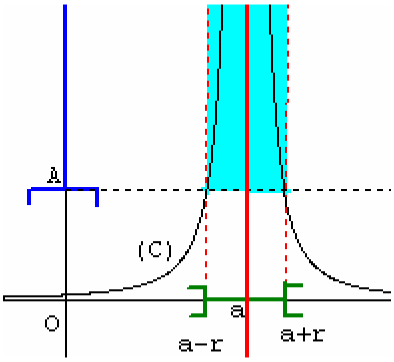
II.نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$

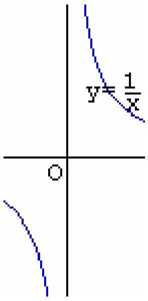
1. النهاية الغير المنتهية عند x_0 :

تعريف: القول أن $f(x)$ ينتهي إلى $+\infty$، $(-\infty)$ عندما x ينتهي إلى x_0 يعني أن كل مجال من الشكل
$]A\,;+\infty[$ ، $(]-\infty\,;A'[)$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل كل قيم x قريبة من x_0 .
و نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ، $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right)$

ملاحظة: المستقيم ذو المعادلة $x = x_0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C) الممثل للدالة f



الدوال المرجعية:



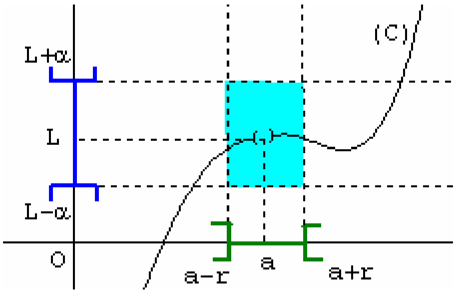
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ (نهاية يمين 0)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ (نهاية يسار 0)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2. النهاية المنتهية عند x_0:

تعريف: القول أن $f(x)$ ينتهي إلى l عندما x $(l \in \mathbb{R})$ ينتهي إلى x_0 يعني أن كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل كل قيم x القريبة من x_0 . و نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$



نتيجة للحفظ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

III. عمليات على النهايات:

أنظر الكتاب المدرسي ص 12

IV. النهايات بالمقارنة :

في مل يأتي l ، l' عددين حقيقيين و a هو إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

مبرهنة 1: f ، g دالتين حيث: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$

إذا كان بجوار a لدينا : $f(x) \leq g(x)$ فإن : $l \leq l'$

مبرهنة 2: f ، g دالتيين .

إذا كان بجوار a لدينا :

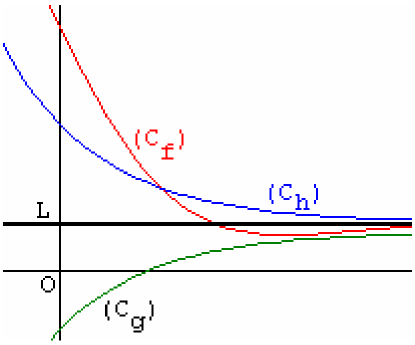
- $g(x) \geq f(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$
- $f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

مبرهنة 3: *Théorème des gendarmes*

f ، g و h ثلاث دوال.

إذا كان بجوار a لدينا : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ مع $\lim_{x\to a} g(x) = l$ و $\lim_{x\to a} h(x) = l$

فإن $\lim_{x\to a} f(x) = l$



حالة خاصة :

إذا كان بجوار a لدينا : $|f(x) - l| \leq g(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

فإن $\lim_{x\to a} f(x) = l$

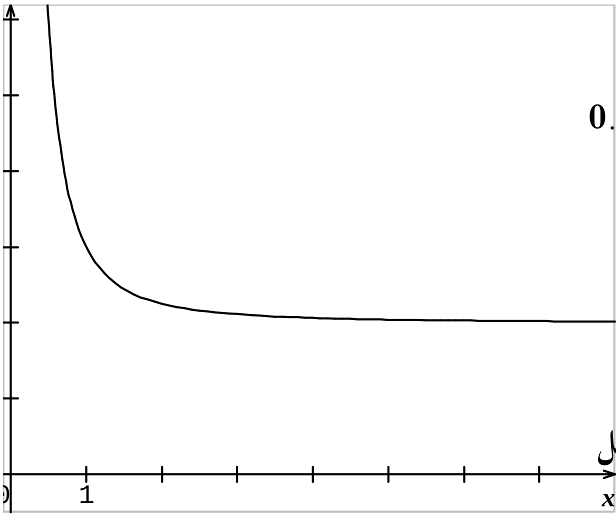
تمرين 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$

1. إعطي قيم مقربة سيعتها 10^{-3}لـــ : $f(3234)$; $f(100)$; $f(10)$; $f(1)$

2. إليك التمثيل (C) للدالة f

ضع تخميناَ بخصوص نهاية $f(x)$ عند $+\infty$



3. نعتبر المجال المفتوح الذي مركزه **2** و نصف قطره **0.01**

أي المجال $]1.99\,;2.01[$

بين أن لـــ $x>10$ فإن $f(x)\in\,]1.99;2.01[$

(يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=2+\dfrac{1}{x^2}$

4. نعتبر المجال $]2-r;2+r[$ مع $r>0$

بيّن أن لـــ $x>x_0$) x_0 يطلب تعيينه بدلالة r)، كل قيم $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2-r;2+r[$.

ماذا تستنتج علماَ أنه يمكن إختيار r صغير بالقدر الذي نريده .

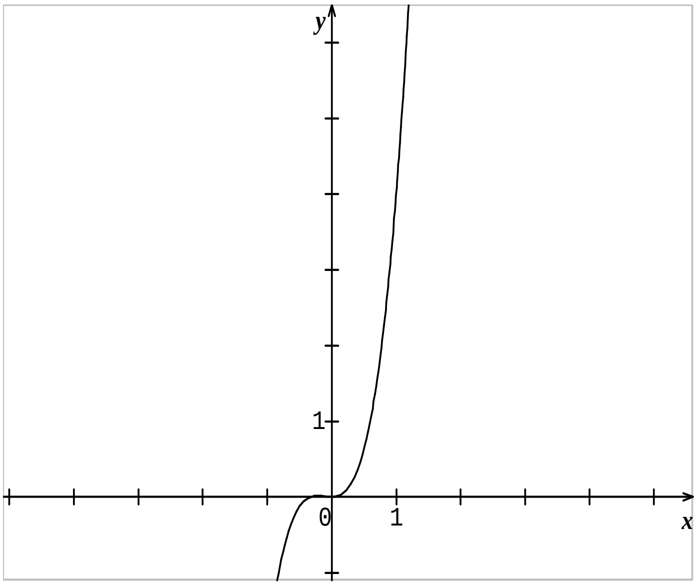
تمرين 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=3x^3+x^2$

1. إعطي قيم لـــ : $f(5182)$; $f(100)$; $f(10)$; $f(1)$

2.إليك التمثيل (C) للدالة f

ضع تخميناَ بخصوص نهاية $f(x)$ عند $+\infty$



3.نعتبر المجال $]100\,;+\infty[$.

بين أن لـــ $x>10$ فإن $f(x)\in\,]100;+\infty[$

4. نعتبر المجال $]A\,;+\infty[$ مع $A>0$.

بيّن أن لكل قيم $x>\sqrt{A}$ ، لدينا $f(x)\in\,]A;+\infty[$